La naturalizzazione della logica e della matematica

Carlo Cellucci

Logica docens e logica utens

Il tema di questo incontro è lo statuto della logica. Devo dire subito, però, che dal mio punto di vista non esiste la logica come disciplina pura, ma esistono la logica nella matematica, la logica nelle scienze naturali, la logica nelle science sociali, e così via. Cioè, per usare la terminologia della tarda scolastica (Javellus, John of St. Thomas, Tartaretus), dal mio punto di vista la logica non è una *logica docens*, ossia una logica coltivata come disciplina a sé, ma una *logica utens*, ossia una logica intesa come strumento delle varie discipline.

Questo mi obbligherebbe a parlare dello statuto della logica in tali discipline, ma, per ragioni di tempo, oltre che di competenza, non sarò in grado di farlo. Mi limiterò a parlare, nei limiti consentitimi dal tempo, dello statuto della logica nella matematica. Per un approfondimento dei temi qui discussi rimando a Cellucci 1998, 2000, 2002.

Lo logica come canone di correttezza

Secondo il punto di vista che è stato dominante nell'ultimo secolo, la logica nella matematica serve primariamente come strumento per giustificare la certezza della matematica attraverso un'indagine del suo fondamento. Tale punto di vista, però, è insostenibile a causa dei risultati di incompletezza di Gödel, che implicano che nessuna giustificazione della certezza della matematica è possibile.

Per questo motivo alcuni, come Gillies, assegnano alla logica nella matematica il ruolo, più modesto, di servire da strumento per controllare la correttezza delle dimostrazioni matematiche meno gli assiomi, cioè per controllare la correttezza della deduzione dei teoremi dagli assiomi. Secondo Gillies, quando in una dimostrazione vi sono «dei passi la cui validità viene messa in questione», noi «disponiamo della logica matematica per risolvere la questione. Se si possono tradurre i passi in un sistema standard di logica e si può mostrare che essi sono validi in quel sistema, generalmente si accetta che l'inferenza è davvero valida. Perciò si può sostenere che la logica matematica è una corte superiore per il ragionamento matematico» (Gillies 1999, 216).

Ma anche questo punto di vista è insostenibile. Infatti, in primo luogo, la formalizzazione si basa su un'analisi del significato che è soggetta ad errori i quali non possono essere controllati in modo meccanico. In secondo luogo, gli errori nelle dimostrazioni matematiche per lo più non nascono dall'uso di inferenze logiche errate, bensì dall'uso di assiomi errati, contro i quali, come mostra il secondo teorema di incompletezza di Gödel, non esistono garanzie assolute.

Dal mio punto di vista, invece, la logica nella matematica serve primariamente come strumento per scoprire le ipotesi mediante le quali si risolvono i problemi matematici. La matematica non è dimostrazione di teoremi, perché concepirla come tale è impossibile a causa dei risultati di incompletezza di Gödel, ma è soluzione di problemi. Per risolvere un problema lo si analizza e, sulla base di tale analisi, mediante qualche procedimento inferenziale non-deduttivo, si formula un'ipotesi. L'ipotesi è una condizione sufficiente per la soluzione del problema, ma essa costituisce a sua volta un problema che dev'essere risolto. Per risolverlo lo si analizza e, sulla base di tale analisi, mediante qualche procedimento inferenziale non-deduttivo, si formula una nuova ipotesi. E così via, con un processo potenzialmente infinito.

Dunque, dicendo che la logica nella matematica serve primariamente come strumento per scoprire le ipotesi, non mi riferisco alla logica deduttiva che, non essendo ampliativa (cioè non consistendo di inferenze la cui conclusione non è contenuta già nelle premesse), non è uno strumento adatto per scoprire alcunché, ma ad una logica più ampia, che tratta anche delle operazioni inferenziali non-deduttive per trovare le ipotesi, quali l'induzione, l'analogia, la metafora, l'uso della figura, ecc., che sono ampliative. La logica deduttiva può servire soltanto come strumento ausiliario per controllare la plausibilità delle ipotesi, accertando che esse si accordino con la conoscenza esistente.

In questo modo, però, non ho ancora risposto esaurientemente alla domanda quale sia lo statuto della logica nella matematica, perché non ho considerato due questioni che stanno a monte di tale domanda. La prima questione è: quando parlo della logica nella matematica, a quale dei due sensi tradizionali della logica mi riferisco, la logica naturale o la logica scientifica? La seconda questione è: quando parlo di operazioni logiche per trovare le ipotesi, assumo che tutte tali operazioni siano consapevoli, o ammetto che alcune di esse sono inconsapevoli? Cercherò di dare una risposta a tali questioni.

Superiorità della logica scientifica sulla logica naturale

Rispondo alla prima questione: quando parlo della logica nella matematica, a quale dei due sensi tradizionali della logica mi riferisco, la logica naturale o la logica scientifica?

Devo chiarire anzitutto che cosa intendo per logica naturale e per logica scientifica. Per logica naturale intendo quell'arte di ragionare che tutti gli uomini posseggono in varia misura, e grazie alla quale i matematici risolvono i loro problemi. Invece per logica scientifica intendo la teoria dell'inferenza deduttiva quale sviluppata originariamente da Aristotele con la sua sillogistica e poi estesa dalla logica matematica. La distinzione tra la logica naturale e la logica scientifica risale almeno alla tarda scolastica (Javellus, John of St. Thomas, Tartaretus), salvo che in essa la logica scientifica viene detta logica artificiale (in contrapposizione alla logica naturale).

La distinzione tra la logica naturale e la logica scientifica sta alla base della posizione di coloro che, come Gillies, attribuiscono alla logica scientifica, che per loro è la logica matematica, il ruolo di servire da strumento per controllare la correttezza delle dimostrazioni della matematica ordinaria, che invece si basano sulla logica naturale. A loro parere, per risolvere i dubbi che possono nascere sulle dimostrazioni della matematica ordinaria, bisogna formalizzarle e controllare se le dimostrazioni formali risultanti sono corrette in base alle regole di deduzione della logica matematica.

Tale posizione costituisce una ripresa della posizione di quei matematici del Cinquecento, come Piccolomini, Clavio, Dasipodio, che attribuiscono alla logica scientifica, che per loro è la sillogistica, il ruolo di servire da strumento per controllare la correttezza delle dimostrazioni di Euclide, che invece si basano sulla logica naturale. A loro parere, per risolvere i dubbi che possono nascere su tali dimostrazioni, bisogna trasformarle in dimostrazioni sillogistiche e controllare se le dimostrazioni risultanti sono corrette in base alle regole della sillogistica.

Specificamente, Piccolomini e Clavio indicano come trasformare in una dimostrazione sillogistica la dimostrazione della proposizione 1 del libro I degli *Elementi*, e Dasipodio estende ciò alle dimostrazioni di tutte le proposizioni dei primi sei libri degli *Elementi*. Certo, Clavio riconosce che le dimostrazioni sillogistiche risultanti da questa trasformazione sono più lunghe e involute di quelle originarie di Euclide, e perciò normalmente i matematici non usano la sillogistica «nelle loro dimostrazioni, perché senza di essa dimostrano in modo più breve e facile ciò che viene loro proposto» (Clavio 1574, 23). Nondimeno Clavio ritiene che solo le dimostrazioni sillogistiche siano direttamente controllabili, perché quelle di Euclide non mostrano tutti i passi logici necessari.

Affermando che le dimostrazioni basate sulla logica naturale possono essere adeguatamente controllate solo mediante la logica scientifica, Piccolomini, Clavio e Dasipodio assumono implicitamente che, come strumento per controllare la correttezza delle dimostrazioni matematiche, la logica scientifica sia superiore alla logica naturale.

I limiti della logica scientifica

Tale assunzione, però, è stata contestata nel Seicento da più parti, per esempio da Locke. Secondo Locke, coloro i quali attribuiscono alla logica scientifica il ruolo di servire da strumento per controllare la correttezza delle dimostrazioni matematiche, trascurano che gli errori nelle dimostrazioni per lo più non nascono dall'uso di inferenze logiche errate, bensì dall'uso di assiomi errati. In effetti, «la facoltà di ragionamento inganna raramente o mai coloro che si fidano di essa, le conseguenze tratte da ciò su cui essa costruisce sono evidenti e certe, ma ciò che più spesso, se non esclusivamente, ci inganna è che i principi da cui traiamo i fondamenti su cui basiamo il nostro ragionamento sono solo parziali, in essi viene tralasciato qualcosa di cui si dovrebbe tener conto per renderlo giusto ed esatto» (Locke 1993, 8-9).

Dal momento che gli errori nelle dimostrazioni per lo più non nascono dall'uso di inferenze logiche errate (poiché la facoltà di ragionamento inganna raramente o mai coloro che si fidano di essa), ma nascono piuttosto dall'uso di assiomi errati, ne segue che la sillogistica non può servire per controllare la correttezza delle dimostrazioni. Che cosa sia il ragionamento corretto non ce lo insegna la sillogistica ma solo la natura, la quale soltanto ci fornisce una conoscenza generale di ciò che è il ragionamento. Perciò dobbiamo esaminare la solidità del ragionamento piuttosto per mezzo di quella facoltà che la natura ci ha dato che non mediante le regole della sillogistica.

Il ragionamento «non consiste in altro che nella percezione della connessione che c'è tra le idee» (Locke 1975, 669). Ma non «è il sillogismo ad aver scoperto quelle idee, o ad aver mostrato la connessione tra di loro, perché esse devono essere state trovate, e la connessione tra esse dev'essere stata percepita in tutti i punti, prima che si possa farne uso razionalmente nel sillogismo» (ivi, 672-673). Quella connessione «nessun sillogismo la mostra né la può mostrare. Quella, solo la mente la percepisce o la può percepire, e solo per vista propria, quando le due idee stanno là in giustapposizione» (ivi, 674). Essa «è vista solo dall'occhio o facoltà percettiva della mente, che le contempla insieme, in giustapposizione» (*ibid.*).

Il sillogismo non serve «a fornire alla mente quelle idee intermedie che possono mostrare la connessione tra idee lontane» (ivi, 679). Esso «non scopre nuove dimostrazioni», ma è soltanto «l'arte di tirar di scherma con quel poco di conoscenza che abbiamo, senza farvi alcuna aggiunta» (*ibid.*). La scoperta delle proposizioni di Euclide non si deve al sillogismo ma alla logica naturale, perché «uno prima conosce, e poi è in grado di dimostrare sillogisticamente. Perciò il sillogismo viene dopo la conoscenza, e allora l'uomo ne ha assai poco bisogno, o nessuno. Ma è principalmente con lo scoprire quelle idee che mostrano la connessione tra idee distanti che si accresce il patrimonio della nostra conoscenza, e si fanno progredire le arti e le scienze utili» (*ibid.*).

I limiti della logica naturale

Nonostante la fondatezza delle obiezioni di Locke contro la logica scientifica, la sua concezione della logica naturale ha seri limiti.

1) Locke fonda la logica naturale sull'intuizione, cioè sulla capacità della mente di percepire «l'accordo o disaccordo tra due idee immediatamente e per se stesse, senza l'intervento di alcun'altra» (ivi, 530-531). Grazie all'intuizione, «la mente non si dà alcuna pena di dimostrare o di esaminare, ma percepisce la verità, come fa l'occhio con la luce, col solo fatto di dirigersi verso di essa. Così la mente percepisce che il bianco non è nero, che un cerchio non è un triangolo, che tre è più di due ed è eguale a uno più due. Verità di questo genere la mente le percepisce alla prima vista delle idee assieme, per mera intuizione, senza l'intervento di alcun'altra idea» (ivi, 531).

Ma, fondando la logica naturale sull'intuizione, Locke va incontro alla difficoltà che per l'intuizione non si danno regole, e perciò su di essa non si può fondare alcuna logica.

2) Locke sostiene che la logica naturale non può basarsi su regole, ma può essere appresa solo attraverso l'esercizio della matematica. Gli uomini nascono «con facoltà e poteri capaci quasi di qualsiasi cosa», ma «è solo l'esercizio di quei poteri che ci dà l'abilità e la capacità in ogni cosa, e ci porta alla perfezione» (Locke 1993, 16). Ora, l'esercizio che meglio fa sviluppare la logica naturale è quello della matematica, che è «un modo di stabilire nella mente un abito di ragionamento rigoroso e disposto propriamente» (ivi, 30). Pertanto, con quale metodo si debba procedere nella scoperta delle verità «è cosa da apprendere nelle scuole dei matematici» (Locke 1975, 643).

Ma, dichiarando che la logica naturale non può basarsi su regole e può essere appresa solo attraverso l'esercizio della matematica, Locke rinuncia ad individuare le regole dell'attività matematica, e quindi confina quest'ultima nell'ambito di ciò che può essere mostrato ma non può essere detto.

3) Locke assume che la logica naturale è infallibile, perché la conoscenza dataci dall'intuizione «è la più chiara e la più certa di cui è capace l'umana fralezza. Questa parte della conoscenza è irresistibile e, come la splendente luce del Sole, ci costringe immediatamente a percepirla non appena la mente svolge il suo sguardo da quella parte; e non lascia alcuno spazio all'esitazione, al dubbio o all'esame ulteriore, bensì la mente è subito

riempita dalla sua luce. È su questa intuizione che si basa tutta la certezza ed evidenza di tutta la nostra conoscenza» (ivi, 531). Essa «si basa in modo così totale su questa intuizione» che, anche nel grado successivo della conoscenza, ossia nella «conoscenza dimostrativa, questa intuizione è necessaria per tutti i legami delle idee intermedie, senza i quali non possiamo raggiungere né conoscenza né certezza» (*ibid*.).

Ma, assumendo che la logica naturale è infallibile perché si fonda sull'intuizione, Locke trascura che l'intuizione non ci dà affatto la certezza, anzi spesso ci fa sbagliare. Per questo e per gli altri motivi che abbiamo già detto, la pretesa che la logica naturale sia infallibile è un'illusione.

4) Locke limita la logica naturale all'ambito del pensiero esplicito, cioè del pensiero basato su processi consapevoli, escludendola da quello del pensiero implicito, cioè del pensiero basato su processi inconsapevoli. Per lui «il pensiero consiste nell'essere consapevoli del fatto che si pensa» (ivi, 115). La consapevolezza «è inseparabile dal pensare» e «sembra essenziale per esso» (ivi, 335). È proprio il fatto che «la consapevolezza accompagna sempre il pensare» che «fa sì che ciascuno sia ciò che egli chiama se stesso, e in tal modo distingue se stesso da tutti gli altri esseri pensanti» (*ibid*.)

Ma, limitando la logica naturale all'ambito del pensiero esplicito, Locke trascura che certi processi inferenziali consapevoli si basano su processi inferenziali inconsapevoli.

Per superare i limiti della concezione della logica naturale di Locke, occorre dunque sottoporla ad alcune sostanziali modifiche.

1) Si deve rinunciare a fondare la logica naturale sull'intuizione, basandola invece sulle operazioni per trovare le ipotesi, quali l'induzione, l'analogia, la metafora, l'uso della figura, ecc..

2) Si deve abbandonare l'idea che la logica naturale non può basarsi su regole ma può essere appresa solo attraverso l'esercizio della matematica, riconoscendo che essa può basarsi su operazioni, come quelle per trovare le ipotesi, che possono essere individuate e che stanno alla base dell'attività matematica.

3) Si deve rinunciare alla pretesa che la logica naturale sia infallibile in quanto fondata sull'intuizione, basandola su operazioni, come quelle per trovare le ipotesi, che per loro natura sono fallibili.

4) Si deve rinunciare a restringere la logica naturale all'ambito del pensiero esplicito includendo in essa anche il pensiero implicito, perché certi processi inferenziali consapevoli si basano su processi inferenziali inconsapevoli.

Logica dell'acquisizione della conoscenza

Queste modifiche conducono ad una concezione della logica essenzialmente diversa da quella di Locke, ma che concorda con lui nel ritenere che la logica primaria è la logica naturale, ossia, come ho detto, quell'arte di ragionare che tutti gli uomini posseggono in varia misura e grazie alla quale i matematici risolvono i loro problemi. In quanto è una tale arte di ragionare, la logica naturale è la logica dell'acquisizione della conoscenza, perché la soluzione di problemi è il processo attraverso cui i matematici acquisiscono la conoscenza.

Una tale concezione della logica si contrappone a quella secondo cui la logica è la logica scientifica, ossia la teoria dell'inferenza deduttiva, attualmente rappresentata dalla logica matematica. Secondo tale concezione, la logica non può essere estesa «inserendovi, o capitoli psicologici sulle diverse capacità conoscitive (l'immaginazione, l'ingegno), o capitoli metafisici sull'origine della conoscenza o sulle diverse specie di certezza a seconda della differenza degli oggetti», perché con una tale aggiunta «non si ha un accrescimento ma una deformazione» della logica in quanto «se ne confondono i confini» (Kant 1900- , III, 7-8). In particolare, la logica non può essere estesa inserendovi capitoli che riguardano i processi di acquisizione della conoscenza. Infatti, non può esistere una logica dell'acquisizione della conoscenza, ma soltanto una logica della giustificazione della conoscenza già acquisita, e la logica scientifica è, appunto, una tale logica della giustificazione. Ma questa concezione, come ho già detto, è insostenibile a causa dei risultati di incompletezza di Gödel.

Che la logica primaria sia la logica naturale e che questa sia la logica dell'acquisizione della conoscenza, implica che l'oggetto principale della logica è lo studio delle inferenze mediante le quali si acquisisce la conoscenza. Ora, queste sono necessariamente inferenze non-deduttive, come l'induzione, l'analogia, la metafora, l'uso della figura, ecc., perché le inferenze deduttive non sono ampliative. Ne segue che, nell'ambito della logica primaria, alla deduzione dev'essere assegnato un ruolo molto minore di quello attribuitole comunemente.

È vero che sono stati dati vari argomenti a favore dell'ampliatività dell'inferenza deduttiva. Ma, ad un attento esame, essi si rivelano inconsistenti.

Per esempio, secondo Dummett, l'inferenza deduttiva è ampliativa perché, per effettuarla, si devono discernere schemi comuni a più pensieri, più specificamente si devono estrarre, da più proposizioni complesse, predicati comuni ad esse. Per esempio, per inferire dalla premessa 'o Giove è più grande di Nettuno e Nettuno è più grande di Marte, oppure Marte è più grande di Nettuno e Nettuno è più grande di Giove', la conclusione 'c'è un corpo di grandezza intermedia tra Giove e Marte', si deve riconoscere che dalla premessa si può estrarre il predicato ternario 'x è di grandezza intermedia tra y e z', dove tale predicato sta per: 'o y è più grande di x e x è più grande di z, oppure z è più grande di x e x è più grande di y'.

Perciò «il ragionamento deduttivo non è in alcun modo un processo meccanico, sebbene possa essere espresso in modo da essere controllabile meccanicamente: esso ha una componente creativa, perché richiede di afferrare schemi nei pensieri espressi, e di metterli in relazione tra loro» (Dummett 1991, 42). Se l'inferenza deduttiva «non fosse un processo creativo, dimostrare un teorema sarebbe un'attività meccanica» (ivi, 305). Poiché essa «ha questa componente creativa, la conoscenza delle premesse di un passo inferenziale non implica la conoscenza della conclusione», e «perciò il ragionamento deduttivo può dare nuova conoscenza» (ivi, 42). Dunque l'ampliatività dell'inferenza deduttiva consiste nel fatto che essa «comporta il riconoscimento di schemi comuni a pensieri differenti, di schemi che stanno lì per essere riconosciuti» (ivi, 305).

Questo argomento di Dummett (che egli attribuisce alquanto implausibilmente a Frege), però, è difettoso, perché fa dipendere l'ampliatività dell'inferenza deduttiva da qualcosa che la precede e che non ha nulla a che fare con essa, cioè l'analisi della forma degli enunciati. Rispetto ad un'analisi già data della forma degli enunciati, l'inferenza deduttiva non è affatto ampliativa. L'ampliatività non sta, quindi, nell'inferenza deduttiva, ma nel processo mediante il quale si formalizzano le premesse e la conclusione dell'inferenza. Essa dunque non si colloca, come ritiene Dummett, nel passaggio dalle premesse dell'inferenza alla conclusione, ma in una fase anteriore, nella quale si decide come analizzare la forma degli enunciati.

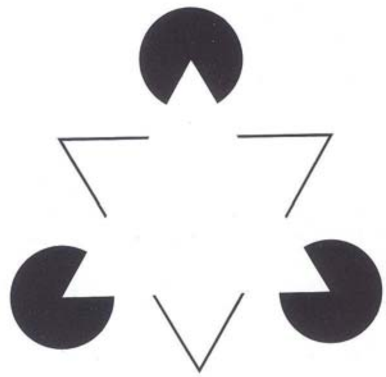
Anche l'affermazione di Dummett che, se l'inferenza deduttiva non fosse un processo creativo, dimostrare un teorema sarebbe un'attività meccanica, non sembra corretta. Dimostrare un teorema vuol dire trovarne una dimostrazione, e stabilire se si può trovarne una dimostrazione è indecidibile. Soltanto in questo senso dimostrare un teorema non è un'attività meccanica. Ciò è perfettamente compatibile col fatto che le inferenze deduttive di cui si compone la dimostrazione non siano ampliative, e quindi non siano creative.

Il ruolo del pensiero implicito

Credo di aver risposto così alla prima questione, cioè se, quando parlo della logica nella matematica, mi riferisco alla logica naturale o alla logica scientifica. Ciò a cui mi riferisco è senz'altro la logica naturale. Questa è la logica dell'acquisizione della conoscenza, perciò l'oggetto principale di studio della logica nella matematica sono le inferenze mediante le quali si acquisisce la conoscenza. Tali inferenze sono necessariamente inferenze non-deduttive, quali l'induzione, l'analogia, la metafora, l'uso della figura, ecc., perché soltanto esse sono ampliative. Nella logica così intesa la deduzione svolge un ruolo molto minore di quello attribuitole dai sostenitori dell'identificazione della logica con la logica scientifica, perché la deduzione non è ampliativa.

Rispondo ora alla seconda questione, cioè se, quando parlo di operazioni logiche per trovare le ipotesi, assumo che tutte tali operazioni sono consapevoli, o ammetto che alcune di esse siano inconsapevoli. La risposta è implicita in quanto ho già detto a proposito delle modifiche da apportare alla concezione della logica naturale di Locke, cioè che non si deve restringere la logica naturale all'ambito del pensiero esplicito, ma si deve includere in essa anche il pensiero implicito, perché certi processi inferenziali consapevoli si basano su processi inferenziali inconsapevoli.

Per vedere che certi processi inferenziali consapevoli si basano su processi inferenziali inconsapevoli, consideriamo, ad esempio, l'uso della figura. Esso dà luogo ad un processo inferenziale consapevole, ma tale processo si basa, ovviamente, sulla visione. Ora, la visione è pensiero implicito perché, quando vediamo qualcosa, nei recettori retinici e nel cervello si svolgono processi di cui non siamo consapevoli e su cui non abbiamo alcun controllo. Non ne abbiamo alcun controllo al punto che non possiamo evitare che ci facciano vedere cose che non ci sono. Per esempio, noi sappiamo benissimo che la figura di Kanizsa:



non è composta da due triangoli bianchi e da tre cerchi neri. E tuttavia non possiamo evitare di vederla così composta.

Inoltre, i processi inconsapevoli che si svolgono nel cervello quando vediamo qualcosa, sono processi inferenziali. Infatti, i recettori retinici forniscono solo dati frammentari ed ambigui, che non sono sufficienti per formarci un'immagine degli oggetti che hanno dato origine a quei dati. È solo mediante processi inferenziali che possiamo formulare un'ipotesi sulla natura di quegli oggetti. I recettori retinici non ci danno immagini più o meno fedeli degli oggetti, ma segnali che non hanno alcuna somiglianza con essi, e che il cervello interpreta formulando, mediante opportuni processi inferenziali, ipotesi sulla natura di quegli oggetti.

Il risultato di tali processi inferenziali è la visione, che quindi è un fenomeno complesso perché non si riduce ai dati forniti dai recettori retinici, ma richiede un'interpretazione dei dati attraverso la formulazione, mediante opportuni processi inferenziali, di un'ipotesi sugli oggetti da cui essi hanno tratto origine. Proprio perché la visione non si riduce ai dati forniti dai recettori retinici, pochi tratti di penna possono suggerire alla mente un'immagine più complessa, per esempio quella di un ombrello.

Quei pochi tratti di penna costituiscono solo dati frammentari ed ambigui, ma sono sufficienti per formulare un'ipotesi sull'oggetto.

Nella misura in cui nel pensiero implicito intervengono processi inferenziali inconsapevoli, si può parlare di una logica del pensiero implicito. E nella misura in cui certe operazioni per trovare le ipotesi, come l'uso della figura, si basano sulla visione, la logica del pensiero esplicito dev'essere integrata con una logica del pensiero implicito.

Naturalmente, allo stato attuale delle conoscenze del funzionamento del cervello, questo è più un tema di ricerca che ricerca compiuta. Le nostre conoscenze sono ancora troppo limitate per darci un'idea chiara dei processi inferenziali che intervengono nel pensiero implicito. Nondimeno su tali processi sono state fatte ipotesi. Per esempio, von Helmholtz ha supposto che sono certe «inferenze induttive che portano alla formazione delle nostre percezioni sensibili», e ha affermato che esse, sebbene siano inconsapevoli, possono ancora essere chiamate «inferenze: inferenze induttive effettuate in modo inconsapevole» (von Helmholtz 1896, 582). Ma, anche indipendentemente dalla plausibilità dell'ipotesi di von Helmholtz, resta il fatto che, per dare una spiegazione del pensiero matematico, dobbiamo tener conto dell'esistenza di uno stretto rapporto di dipendenza tra il pensiero esplicito e il pensiero implicito.

Matematica e sopravvivenza

La posizione che ho presentato qui comporta una naturalizzazione della logica: la logica primaria è la logica naturale, e nell'ambito di essa si collocano sia il pensiero esplicito che il pensiero implicito.

Dato lo stretto legame che esiste tra la logica nella matematica e la matematica, c'è ora da chiedersi se questa naturalizzazione della logica comporti anche una parallela naturalizzazione della matematica.

La risposta non può essere che affermativa. Per vedere la necessità di una naturalizzazione della matematica basta considerare la nostra immagine del mondo fisico.

Contrariamente all'immagine tranquillizzante che ne è stata data nei secoli scorsi, oggi sappiamo che l'uomo vive in un mondo fisico disordinato e irregolare, non tutti i cui fenomeni sono descrivibili con precisione grande a piacere. Ciò si accorda perfettamente con l'idea che la matematica è soluzione di problemi, perché i problemi nascono da situazioni che rendono perplessi, e le situazioni che rendono maggiormente perplessi sono quelle disordinate, irregolari e non descrivibili con precisione grande a piacere.

Ma c'è di più: dal carattere disordinato, irregolare e non descrivibile con precisione grande a piacere del mondo fisico, dipende l'importanza vitale della matematica. Infatti, proprio questo carattere del mondo fisico pone l'uomo continuamente di fronte a nuovi problemi, alcuni dei quali sono addirittura essenziali per la sua sopravvivenza, e tra questi ve ne sono alcuni che hanno un carattere matematico.

Per esempio i nostri antichi progenitori, per sopravvivere, da un lato avevano il problema di catturare animali per cibarsene, e dall'altro avevano il problema di evitare di diventar preda e cibo dei grandi predatori. Per risolvere tali problemi, essi dovettero affrontarne altri, come quello di riconoscere le forme dei corpi presenti nell'ambiente e di classificarle in buone, cattive e indifferenti, quello di distinguere gruppi di forme eguali, e quello di localizzare forme e compiere azioni di cattura o di fuga, prevedendo con precisione il movimento di fuga della preda o il movimento di inseguimento del predatore.

Questi problemi avevano un carattere matematico. Riconoscere forme e classificarle in buone, cattive e indifferenti, presupponeva che l'uomo fosse capace di percepire forme geometriche perché, senza tale capacità, egli non sarebbe stato in grado di discernere i contorni dei corpi. Distinguere gruppi di forme eguali presupponeva che l'uomo fosse capace di avere un qualche concetto, sia pure limitato, di numero. Localizzare forme in rapporto al proprio corpo ed effettuare movimenti di cattura o di fuga, prevedendo con precisione il movimento di fuga della preda o il movimento di inseguimento del predatore, presupponeva che l'uomo fosse capace di rappresentarsi gli spostamenti di oggetti nello spazio e di effettuare una simulazione interna di tali spostamenti.

Dunque, lungi dall'essere un'attività separata dal mondo fisico, la matematica affonda le sue radici in esigenze vitali basilari e primordiali dell'uomo.

Conoscenza e adattamento

Questo non sorprende dal momento che la matematica, come del resto tutta la conoscenza, rientra in un processo naturale di adattamento all'ambiente che esiste, in misura maggiore o minore, in ogni forma di vita sulla Terra.

Come osserva Russell, «tutta la nostra vita conoscitiva, considerata biologicamente, rientra nel processo di adattamento ai fatti. Si tratta di un processo che esiste, in grado maggiore o minore, in ogni forma di vita, ma che di solito non viene detto 'conoscitivo' finché non raggiunge un certo livello di sviluppo. Poiché non esiste da nessuna parte una netta frontiera tra l'animale più infimo e il filosofo più profondo, è evidente che non possiamo dire precisamente in quale punto noi passiamo dal mero comportamento animale a qualcosa che merita di essere gratificato del nome di 'conoscenza'. Ma ad ogni stadio c'è un adattamento, e ciò a cui l'animale si adatta è l'ambiente dei fatti» (Russell 1997, 160).

Che tutta la nostra vita conoscitiva rientri nel processo di adattamento ai fatti significa che il mondo degli oggetti quotidiani è una costruzione dettata in gran parte da regole che sono state incorporate nell'organizzazione biologica dell'organismo dal processo naturale di adattamento all'ambiente. Tale costruzione non si riduce semplicemente all'osservazione, cioè ai segnali forniti dai recettori sensoriali all'organismo. Un organismo sa riconoscere una forma visiva anche quando è incompleta, e ciò sarebbe inspiegabile se la visione si riducesse soltanto ai segnali forniti dai recettori sensoriali.

L'osservazione presuppone che l'organismo possegga già una conoscenza grazie alla quale i segnali forniti dai recettori sensoriali acquistano un significato. Per vedere un oggetto, l'organismo deve sapere già che cos'è un oggetto, che gli oggetti possono occupare un certo spazio, che alcuni oggetti possono muoversi e altri no, e così via. Senza tale conoscenza, quanto i recettori sensoriali comunicano all'organismo non avrebbe senso. Questa conoscenza che è presupposta dall'osservazione è il risultato dell'adattamento all'ambiente. Essa è stata acquisita dalla specie in una fase del suo sviluppo, ed è incorporata nell'organizzazione biologica degli organismi come conoscenza ereditata.

Quella che Kant chiama conoscenza a priori in realtà è soltanto conoscenza ereditata. Questo non significa che la conoscenza a priori vada intesa come conoscenza che fu acquisita originariamente a posteriori dai nostri antichi progenitori e che poi è stata fissata attraverso la selezione naturale. In realtà tale conoscenza era a priori anche per i nostri antichi progenitori, sebbene a priori in un senso diverso da quello di Kant, ed è poi diventata adattata all'ambiente attraverso la selezione naturale.

La conoscenza a priori è costituita da ipotesi per la soluzione di problemi, ipotesi che non derivano dall'esperienza sensoriale ma sono state trovate in origine mediante inferenze non-deduttive inconsapevoli, che partono sì dall'esperienza ma vanno al di là di essa perché sono ampliative. Dunque tali ipotesi non sono a priori nel senso di Kant, perché non sono assolutamente indipendenti dall'esperienza, ma sono a priori in quanto non derivano dall'esperienza. Esse non derivano dall'esperienza, perché sono state ottenute mediante inferenze non-deduttive le cui premesse partono dall'esperienza ma la cui conclusione va al di là di essa.

Alcune di queste ipotesi ottenute mediante inferenze non-deduttive inconsapevoli sopravvissero e divennero conoscenza incorporata nell'organizzazione biologica degli organismi. Tale conoscenza non è conoscenza a posteriori, perché è il risultato dell'eliminazione di ipotesi che erano state inventate a priori e che si sono rivelate non idonee. Il processo attraverso cui le ipotesi sono state eliminate costituisce un adattamento.

Si può addirittura concepire l'intero processo vitale come un'attiva produzione di ipotesi relative al modo in cui l'organismo deve condursi nel mondo, ipotesi che sono confermate o smentite e che così mantengono vivo il processo di adattamento. Quelle che sono confermate vengono incorporate nell'organizzazione biologica degli organismi come conoscenza a priori. È su questo che si basa la logica naturale e in particolare il pensiero implicito.

Geometria e adattamento

Anche la matematica rientra in un processo naturale di adattamento all'ambiente, grazie al quale certe conoscenze sono incorporate nell'organizzazione biologica degli organismi come conoscenza a priori. Come sottolinea Poincaré, questo si può vedere in primo luogo dalla geometria.

Secondo Poincaré, l'idea di spazio geometrico, in quanto distinta da quella di spazio fisico, non può essere nata dalle nostre sensazioni, in particolare non può essere nata dalle nostre sensazioni visive. Infatti, nel caso di un'impressione puramente visiva dovuta ad un'immagine che si forma sul fondo della retina, anche un'analisi sommaria ci mostra «quest'immagine sì come continua, ma come avente soltanto due dimensioni, e ciò distingue già lo spazio geometrico da quello che può dirsi lo spazio visivo puro» (Poincaré 1968, 78).

È vero che «la vista ci permette di apprezzare le distanze e quindi di percepire una terza dimensione», ma «questa percezione della terza dimensione si riduce alla sensazione dello sforzo di accomodamento che occorre fare, e a quello della convergenza che occorre imporre ai due occhi per percepire distintamente un oggetto. Sono sensazioni muscolari completamente differenti dalle sensazioni visive che ci hanno dato la nozione delle prime due dimensioni» (*ibid*.).

Se l'idea di spazio geometrico non può essere nata dalle nostre sensazioni visive, essa dev'essere stata costruita dalla mente con elementi che preesistevano in essa, e l'esperienza esterna dev'essere stata solo l'occasione per esercitare questa sua capacità. Lo spazio geometrico «è la mente che lo costruisce, ma non lo costruisce con nulla, le occorrono dei materiali e dei modelli. Questi materiali, così come questi modelli, preesistono in essa» (Poincaré 1970, 98).

Perciò l'idea di spazio geometrico non può essere stata acquisita originariamente a posteriori dai nostri antichi progenitori. Essa è stata una loro invenzione. Pertanto l'idea di spazio geometrico è stata a priori nella sua concezione, sebbene non valida a priori nel senso kantiano, e l'esperienza ci ha soltanto «guidati mostrandoci quale scelta si adatti meglio alle proprietà dei nostri corpi» (Poincaré 1968, 107).

Tuttavia, anche se la geometria non è una scienza derivante dall'esperienza, essa «è una scienza nata a proposito dell'esperienza; noi abbiamo creato lo spazio che essa studia, ma adattandolo al mondo in cui viviamo» ed «è l'esperienza ad aver guidato la nostra scelta» (ivi, 121). La necessità di una scelta deriva dal fatto che, sebbene lo spazio geometrico sia costruito dalla mente, «non vi è un modello unico che si imponga ad essa»; per esempio vi è una scelta «tra lo spazio a quattro dimensioni e lo spazio a tre dimensioni» (Poincaré 1970, 98).

Che la specie abbia scelto un quadro di associazioni spaziali tridimensionale si deve al fatto che essa «si è adattata ad un mondo che aveva certe proprietà; e la principale di queste proprietà è che esistono dei solidi naturali i cui spostamenti avvengono sensibilmente secondo le leggi che chiamiamo leggi del moto dei corpi solidi invariabili. Se dunque il linguaggio delle tre dimensioni è quello che ci permette di descrivere più facilmente il nostro mondo, non dobbiamo stupircene», perché questo linguaggio è modellato sul nostro quadro di associazioni spaziali, e tale quadro «si è formato al fine di poter vivere in questo mondo» (Poincaré 1999, 100).

Si potrebbero anche immaginare esseri pensanti che, pur vivendo nel nostro stesso mondo, abbiano un quadro di associazioni spaziali a quattro dimensioni, ma è dubbio che essi riuscirebbero a vivere in questo universo «e a difendersi dai mille pericoli da cui vi sarebbero assaliti» (*ibid*.).

Matematica ed evoluzione

In quanto rientra in un processo naturale di adattamento all'ambiente, la matematica risponde ad un profondo bisogno dell'uomo. Questi cerca continuamente di risolvere problemi, in primo luogo problemi vitali per la sua sopravvivenza, da quello dei nostri antichi progenitori di procurarsi cibo e di evitare di diventare cibo dei grandi predatori, al problema di evitare i rischi fisici, biologici e sociali del mondo attuale. Tra i problemi vitali per la sopravvivenza dell'uomo ve ne sono alcuni che hanno un carattere matematico, come quello dei nostri antichi progenitori di riconoscere forme, di distinguere gruppi di forme eguali e di localizzare forme.

L'offerta di problemi è essenziale per il successo dell'uomo, perché la mancanza di problemi può provocarne la stagnazione. Per l'uomo vivere è porre problemi, trovare ipotesi per la loro soluzione e controllarne la plausibilità. Attraverso la posizione di problemi l'uomo esce dalla nicchia in cui vive abitualmente e va alla ricerca di nuove esperienze, rischiando e cercando situazioni nuove ed estranee. In tal modo egli può raggiungere un superiore livello di sviluppo.

In questo processo si inserisce la matematica, i cui problemi rispondono a varie esigenze dell'uomo, da quelle più basilari e vitali, essenziali per la sua stessa sopravvivenza, a quelle più astratte e apparentemente più lontane dai suoi bisogni vitali, ma che pure sono funzionali allo scopo di pervenire a un superiore livello di sviluppo.

Nel tentare di risolvere problemi l'uomo non è isolato, perché tutti gli organismi viventi pongono e cercano continuamente di risolvere problemi. La matematica, in quanto posizione e soluzione di problemi, non è propriamente nient'altro che la continuazione di attività degli organismi inferiori. Le «capacità di distinguere il numero, la grandezza, l'ordine e la forma (rudimenti di un istinto matematico) non sono esclusivamente proprietà del genere umano» (Boyer-Merzbach 1989, 1). In «molte forme di vita inferiori è chiaramente presente una consapevolezza delle differenze tra strutture che si trovano nel loro ambiente, e ciò è affine all'interesse del matematico per la forma e la relazione» (ivi, 1-2). Quanto più l'adattamento all'ambiente si perfeziona, tanto più cresce tale consapevolezza. Perciò la matematica è un fenomeno nella storia dell'evoluzione.

RIFERIMENTI

Boyer, Carl Benjamin e Merzbach, Uta C.: 1989, *A history of mathematics*, Wiley, New York (edizione originale 1968).

Cellucci, Carlo: 1998, *Le ragioni della logica*, Laterza, Bari.

Cellucci, Carlo: 2000, *The growth of mathematical knowledge: an open world view*, in Grosholz-Breger 2000, pp. 153-176.

Cellucci, Carlo: 2002, *Filosofia e matematica*, Laterza, Bari (di prossima pubblicazione).

Clavio, Cristoforo: 1574, *Euclidis Elementorum libri XV*, Accolio, Roma.

Dummett, Michael: 1991, *Frege. Philosophy of mathematics*, Duckworth, London.

Gillies, Donald: 1999, *Recensione di* Cellucci 1998, «Philosophia Mathematica», vol. 7, pp. 213-222.

Grosholz, Emily R. e Breger, Herbert (eds.): 2000, *The growth of mathematical knowledge*, Kluwer, Dordrecht.

Kant, Immanuel: 1900- , *Gesammelte Schriften*, Königlich Preußischen Akademie der Wissenschaften, Berlin.

Locke, John: 1975, *An essay concerning human understanding*, Peter H. Nidditch (ed.), Oxford University Press, Oxford (edizione originale 1690).

Locke, John: 1993, *Of the conduct of the understanding*, Thoemmes Press, Bristol (edizione originale 1706).

Poincaré, Henri: 1968, *La science et l'hypothèse*, Flammarion, Paris (edizione originale 1902).

Poincaré, Henri: 1970, *La valeur de la science*, Flammarion, Paris (edizione originale 1905).

Poincaré, Henri: 1999, *Science et méthode*, Kimé, Paris (edizione originale 1908).

Russell, Bertrand: 1997, *Human knowledge. Its scope and limits*, Routledge, London (edizione originale 1948).

von Helmholtz, Hermann Ludwig Ferdinand: 1896, *Handbuch der physiologischen Optik*, Voss, Leipzig (edizione originale, 1867).