Gottlob Frege: una rivoluzione nella concezione della logica?

Carlo Cellucci

1. Premessa

È opinione diffusa che Frege abbia iniziato una rivoluzione nella logica. Prima «della rivoluzione la logica era dominata dal paradigma aristotelico, il cui nocciolo era la teoria del sillogismo; dopo la rivoluzione la logica venne ad essere dominata dal paradigma fregeano, il cui nocciolo era il calcolo proposizionale e il calcolo dei predicati del primo ordine»[1]. L'*Ideografia* di Frege è «il documento di fondazione della logica contemporanea e, nonostante tutti i difetti che essa contiene, rimane un paradigma», anzi, «nella storia della logica c'è un solo libro che può essere paragonato all'*Ideografia*, cioè gli *Analitici Primi* di Aristotele»[2].

In questo articolo non intendo discutere, però, se Frege abbia iniziato una rivoluzione nella logica, ma piuttosto se egli abbia iniziato una rivoluzione nella concezione della logica, cioè nel modo di intendere il compito della logica, e quindi la sua finalità ed utilità. A tale scopo confronterò la concezione della logica di Frege con quella di Aristotele, nonché con quelle di due predecessori immediati di Frege, cioè Mill e von Helmholtz.

2. La concezione della logica di Frege

Secondo Frege, il compito della logica è quello di giustificare le verità matematiche. Una giustificazione è necessaria perché non basta conoscere le verità matematiche, occorre anche porre la loro verità al di là di ogni dubbio. Dunque il compito della logica è di tipo epistemologico: garantire la matematica contro il dubbio scettico.

La giustificazione delle verità matematiche si ottiene, secondo Frege, mostrando che alla loro base vi sono certe proposizioni fondamentali vere, perché si può «garantire la verità di un giudizio solo nella misura in cui sono veri i giudizi cui si fa ricorso per la giustificazione»[3]. E «la logica si occupa solo di quei fondamenti dei giudizi che sono verità»[4]. Perciò le proposizioni fondamentali che stanno alla base delle verità matematiche devono essere vere. Inoltre esse devono essere indubitabili, cioè non devono contenere alcun «pensiero la cui verità ci appare dubbia»[5]. Infatti, se non fossero indubitabili, non si raggiungerebbe lo scopo epistemologico di garantire la matematica contro il dubbio scettico.

Ora, secondo Frege, ciò che ci assicura che le proposizioni fondamentali che stanno alla base delle verità matematiche sono vere e indubitabili è che esse si basano sull'intuizione, e precisamente sull'intuizione sensibile pura kantiana[6], nel caso della geometria, e sull'intuizione intellettuale leibniziana[7], nel caso dell'aritmetica, sebbene

[1] Gillies (1992), p. 266.
[2] Barnes (1999), p. 204.
[3] Frege (1969), p. 190.
[4] Ivi, p. 3.
[5] Ivi, p. 221.
[6] Kant (1900-), vol. 2, p. 410.
[7] Leibniz (1965), vol. 5, p. 343.

Frege alla fine della sua vita, in seguito al fallimento di ogni tentativo di fondare le proposizioni fondamentali dell'aritmetica sull'intuizione intellettuale, si risolva a fondare anch'esse sull'intuizione sensibile pura[8]. Che per Frege le proposizioni fondamentali che stanno alla base delle verità matematiche poggino sull'intuizione, mostra i limiti di affermazioni come quella di Coffa che «il padre della logica moderna non aveva alcuna opinione sul fondamento della verità»[9].

Una volta individuate le proposizioni fondamentali vere e indubitabili, per mostrare che esse stanno alla base delle verità matematiche, secondo Frege, la logica deve far vedere che le verità matematiche possono essere dedotte da esse. Infatti, giudicare che una proposizione è una verità matematica «perché siamo a conoscenza del fatto che altre verità ne forniscono una giustificazione, si dice dedurre. Ci sono leggi che governano questo tipo di giustificazione, e stabilire queste leggi dell'inferenza corretta è compito della logica»[10]. Dunque, una volta individuate le proposizioni fondamentali vere e indubitabili, la logica deve fissare le leggi dell'inferenza corretta, e dedurre tutte le verità matematiche da quelle proposizioni fondamentali mediante tali leggi. In questo modo si ottiene una giustificazione delle verità matematiche.

Mentre il compito della logica è quello di giustificare le verità matematiche, per Frege non è né può essere suo compito scoprire nuove verità matematiche. Di fronte ad una verità matematica ci si può chiedere, da un lato, per quale via essa «sia stata gradualmente conseguita, dall'altro lato, in che modo si giunga poi a darle il più solido fondamento»[11]. Le due vie non coincidono, perché di solito accade «che prima si afferri il contenuto di una proposizione per una via, e poi se ne svolga la dimostrazione rigorosa per un'altra via più difficile, attraverso cui si vengono pure a riconoscere con maggiore esattezza le sue condizioni di validità. Pertanto bisogna scindere in generale le due questioni, come giungiamo al contenuto di un giudizio, e donde ricaviamo la giustificazione del nostro asserto»[12].

Rispetto a queste due questioni, alla prima «si deve forse rispondere differentemente da persone differenti, mentre la seconda è più determinata e la sua risposta dipende dalla natura interna della proposizione considerata»[13]. Quindi, per Frege, alla prima domanda, ossia al problema della scoperta, non si può dare una risposta oggettiva, e perciò il problema della scoperta non può essere oggetto della logica. Una risposta oggettiva può essere data solo alla seconda domanda, ossia al problema della giustificazione. Di conseguenza la logica può occuparsi solo della giustificazione delle verità matematiche, ossia delle «leggi in base a cui un giudizio può essere giustificato mediante altri»[14].

Né, secondo Frege, può essere compito della logica studiare le leggi «secondo le quali si svolge l'effettivo processo di pensiero, e mediante le quali si dovrebbe poter spiegare il singolo processo mentale della singola persona»[15]. Infatti la logica deve occuparsi delle leggi dell'inferire corretto, mentre «le leggi dell'inferire effettivo non sono affatto leggi dell'inferire corretto; altrimenti le fallacie sarebbero impossibili»[16]. Identificare le leggi logiche con le leggi del pensiero avrebbe l'assurda conseguenza che, poiché «l'uomo, come tutti gli esseri viventi, è andato sempre ulteriormente

[8] Per un esame del ruolo dell'intuizione in Frege, cfr. Cellucci (1998), pp. 92-112.
[9] Coffa (1991), p. 124.
[10] Frege (1969), p. 3.
[11] Frege (1964), p. *ix*.
[12] Frege (1988), p. 14.
[13] *Ibid*.
[14] Frege (1969), p. 190.
[15] Ivi, p. 4.
[16] *Ibid*.

evolvendosi», un'inferenza che oggi è corretta potrebbe non essere più corretta tra millenni, e non essere stata corretta millenni fa, dando così luogo ad «una confusione tra le leggi dell'inferenza effettiva e le leggi dell'inferenza corretta»[17]. La correttezza delle leggi logiche non può riferirsi «al tasso di fosforo presente nel cervello o ad altri fattori suscettibili di cambiamento»[18].

Coerentemente con questa delimitazione del compito della logica, e quindi della sua finalità ed utilità, Frege formula un sistema logico, la cosiddetta 'ideografia', che serve unicamente a giustificare le verità matematiche, tralasciando tutto ciò che non è funzionale a tale scopo. Grazie all'ideografia, «per la mancanza di lacune nelle catene di inferenze si ottiene che ogni assioma, ogni presupposto, ipotesi, o comunque lo si voglia chiamare, su cui si basa una dimostrazione viene portato alla luce; e in questo modo si acquisisce un fondamento per giudicare la natura epistemologica della legge che viene dimostrata»[19]. Pertanto, «se per caso qualcuno trovasse qualcosa di erroneo, deve poter indicare dove a suo avviso si trova l'errore: nelle leggi fondamentali, nelle definizioni, nelle regole o nella loro applicazione in un determinato luogo. Se si trova tutto a posto, allora con ciò si conoscono esattamente i fondamenti su cui si basa ogni singolo teorema»[20].

Poiché questo è lo scopo dell'ideografia, Frege rinuncia ad esprimere mediante essa «tutto ciò che è senza importanza per la conseguenzialità dell'inferenza»[21]. Come Frege stesso riconosce, l'ideografia «non rende con fedeltà il pensiero»[22]. Essa è soltanto «uno strumento inventato per determinati scopi scientifici», e quindi «non si può condannarlo se non è di alcuna utilità per altri scopi»[23]. Lo scopo scientifico per cui l'ideografia è stata inventata è quello di giustificare le verità matematiche, garantendole così contro il dubbio scettico.

3. La concezione della logica di Aristotele

Per valutare se Frege abbia iniziato una rivoluzione nella concezione della logica considererò anzitutto la concezione della logica di Aristotele, a cui Frege viene comunemente contrapposto.

Secondo Aristotele, il compito della logica è quello di «trovare un metodo mediante il quale si possano costruire, per ogni problema proposto, dei sillogismi basati su opinioni notevoli»[24].

Per 'metodo mediante il quale si possano costruire, per ogni problema proposto, dei sillogismi', Aristotele intende un metodo che permetta di trovare dei sillogismi per risolvere quel problema. Più precisamente, il metodo deve dirci «come troveremo sempre sillogismi per risolvere ogni dato problema, e per quale via potremo assumere le premesse appropriate per ciascun problema»[25]. Quindi il metodo deve permettere di trovare, per ogni problema proposto, le premesse di sillogismi che conducano alla soluzione del problema. Ciò equivale a dire che il metodo deve permettere di trovare i

[17] *Ibid*.
[18] Ivi, p. 5.
[19] Frege (1962), vol. 1, p. *vii*.
[20] *Ibid*.
[21] Frege (1964), p. *x*.
[22] Ivi, p. *xiii*.
[23] Ivi, p. *xi*.
[24] *Topica*, A 1, 100 a 18-20.
[25] *Analytica Priora*, A 27, 43 a 20-22.

termini medi di tali sillogismi, perché la ricerca delle premesse «si riduce alla ricerca del termine medio»[26].

Per ‘sillogismi basati su opinioni notevoli’, Aristotele intende sillogismi le cui premesse si basano su opinioni che «appaiono accettabili a tutti, o alla grande maggioranza, o ai sapienti, e tra costoro o a tutti, o alla grande maggioranza, o a quelli che sono più noti e stimati»[27].

Dunque per Aristotele la soluzione di un problema proposto si ottiene partendo dal problema e risalendo all’indietro per mezzo di sillogismi, trovando termini medi e quindi premesse basate su opinioni notevoli. Ad ogni passo si controllano le premesse trovate, traendone deduzioni. Se da una premessa si deducono proposizioni contraddittorie tra loro o contraddittorie con un’opinione notevole, allora quella premessa si considera confutata, altrimenti viene accettata.

Che per Aristotele la soluzione di un problema si ottenga partendo dal problema e risalendo all’indietro mediante sillogismi, significa che per lui lo scopo del sillogismo non è quello di trovare le possibili conclusioni di premesse date, ma è invece quello di trovare le possibili premesse di una conclusione data. Come sottolinea Kapp, il sillogismo «può essere inteso in due maniere completamente differenti. O dobbiamo partire da combinazioni date di premesse e cercarne le possibili conclusioni, oppure dobbiamo partire da una data conclusione e cercarne le possibili premesse. La prima sembra la cosa naturale da fare, e perciò è stato tante volte trascurato che Aristotele intese il suo scopo nel secondo senso»[28].

Cercare le possibili conclusioni di premesse date non può essere, per Aristotele, lo scopo della ricerca, perché il problema è dato dall’inizio. Lo scopo della ricerca è invece quello, partendo dal problema, di cercare le possibili premesse che ne danno la soluzione. Dunque per Aristotele il sillogismo ha uno scopo euristico.

Ma come si trovano, secondo Aristotele, le possibili premesse di una conclusione data? Al riguardo egli indica varie vie.

Una via, ad esempio, è l’*inventio medii*, che è la tecnica mediante la quale, per dimostrare una proposizione universale affermativa, si elencano i caratteri che implicano il predicato della proposizione e i caratteri implicati dal soggetto della proposizione, e si prende come termine medio un carattere che nello stesso tempo implichi il predicato e sia implicato dal soggetto della proposizione. Così se A ed E sono rispettivamente il predicato e il soggetto della proposizione, C è l’insieme dei caratteri che implicano il predicato della proposizione e Z è l’insieme dei caratteri implicati dal soggetto della proposizione, allora «A appartiene a tutto E quando si prende un C identico a uno dei Z. Questo sarà il medio, mentre A e E saranno gli estremi»[29].

Un’altra via è l’induzione, che è anch’essa una sorta di sillogismo, perché per mezzo di essa si «inferisce mediante uno degli estremi che l’altro estremo appartiene al medio»[30]. Per esempio, mediante l’induzione si inferisce che gli animali senza bile (medio) sono longevi (maggiore) dal fatto che specie individuali, come l’uomo, il cavallo, il mulo (minore), sono animali senza bile (medio). Ma, anche se l’induzione è una sorta di sillogismo, essa differisce dal sillogismo perché quest’ultimo «parte da proposizioni universali mentre l’induzione parte da proposizioni particolari»[31].

[26] *Analytica Posteriora*, B 3, 90 a 35.
[27] *Topica*, A 1, 100 b 21-23.
[28] Kapp (1967), p. 71.
[29] *Analytica Priora*, A 28, 44 b 8-10.
[30] Ivi, B 23, 68 b 16-17.
[31] *Analytica Posteriora*, A 2, 81 b 1.

Un'altra via è l'analogia, che è un procedimento che «assomiglia all'induzione, pur non essendo la stessa cosa. Nell'induzione, infatti, risalendo dagli oggetti singoli, si stabilisce l'universale, nel procedimento analogico, invece, ciò che viene stabilito non è un universale che contenga tutti gli oggetti simili»[32].

Un'altra via è la definizione, che è importante perché «anche nelle scienze matematiche alcune proposizioni non si dimostrano facilmente per mancanza di una definizione»[33]. Infatti, «quando si stabiliscono definizioni degli elementi (dicendo ad esempio che cos'è la linea e che cos'è il cerchio), sarà facilissimo dimostrare le proposizioni», mentre «se le definizioni dei principi non vengono stabilite, la dimostrazione risulterà difficile, anzi forse del tutto impossibile»[34].

Se questo è, per Aristotele, il compito della logica, qual è per lui la sua utilità? La logica è utile per la pratica dell'argomentazione, nelle dispute sia pubbliche sia private, perché «col possesso del metodo saremo più facilmente in grado di disputare intorno all'argomento proposto»[35]. Inoltre, la logica è utile per le scienze perché, imparando a sviluppare «un'aporia nelle due direzioni opposte, possiamo scorgere più facilmente in ogni cosa il vero e il falso»[36]. Sviluppare un'aporia nelle due direzioni opposte vuol dire saggiare una proposizione e la proposizione opposta traendone deduzioni.

Ma soprattutto la logica è utile per le scienze perché, «essendo adatta a ricercare, possiede la via verso i principi di tutte le scienze»[37]. Cioè, possiede la via per trovare i principi su cui poggiano le dimostrazioni delle scienze. Tali principi non possono trovarsi per via apodittica perché, «partendo dai principi di una scienza, è impossibile dire alcunché su di essi», e «perciò è necessario penetrarli attraverso elementi basati sull'opinione»[38]. Il fatto che i principi di una scienza si trovino attraverso elementi basati sull'opinione implica che l'opinione non solo non è in contrasto con le scienze, ma anzi è essenziale per trovarne i principi.

Che la logica sia utile per trovare i principi delle scienze significa che per Aristotele essa ci permette di scoprire nuove verità.

È vero che, secondo Aristotele, la logica ci permette anche di giustificare le verità già scoperte. Essa ci permette di farlo mostrandone il fondamento, perché «noi pensiamo di avere conoscenza senza riserve di una cosa» solo «quando pensiamo di conoscere il fondamento in virtù del quale quella cosa è, di conoscere che è il fondamento di quella cosa»[39]. Naturalmente il fondamento dev'essere più credibile di quello che viene dimostrato, perché per avere conoscenza senza riserve di una cosa è necessario poter «conoscere i principi di più e credere in essi di più che in ciò che viene dimostrato»[40].

Ma questo non contraddice il fatto che per Aristotele il sillogismo, e in generale la logica, ha uno scopo euristico. Infatti, anche nella giustificazione mediante sillogismi scientifici, è capovolto l'ordine normale di ciò che è dato e di ciò che è cercato, perché la verità da giustificare è già data, e la giustificazione consiste nel trovare premesse che siano più credibili di tale verità e che possano essere usate come premesse di un sillogismo che la abbia come conclusione.

[32] *Topica*, Θ 1, 156 b 14-17.
[33] Ivi, Θ 3, 158 b 29-30.
[34] Ivi, Θ 3, 158 b 35-159 a 1.
[35] Ivi, A 2, 101 a 29-30.
[36] Ivi, A 2, 101 a 35-36.
[37] Ivi, A 2, 101 b 3-4.
[38] Ivi, A 2, 101 a 37-b 1.
[39] *Analytica Posteriora*, A 2, 71 b 9-12.
[40] Ivi, A 2, 72 a 38-39.

4. Confronto tra le concezioni della logica di Frege e di Aristotele

Da questa descrizione della concezione della logica di Aristotele appare chiaro che essa è più ampia di quella di Frege.

Per esempio, per Aristotele la logica deve servire per le scienze perché, sviluppando un'aporia nelle due direzioni opposte, possiamo scorgere più facilmente in ogni cosa il vero e il falso. Ma questo richiede di trarre deduzioni da ipotesi che possono anche essere false.

Frege, invece, esclude questa possibilità. A suo parere «si può dedurre qualcosa soltanto da proposizioni vere. Se quindi un gruppo di proposizioni contiene una proposizione la cui verità non è ancora conosciuta o che è sicuramente falsa, allora non si può usare quest'ultima proposizione per trarne deduzioni. Se vogliamo trarre deduzioni dalle proposizioni di un gruppo, dobbiamo prima escludere tutte le proposizioni la cui verità è dubbia»[41]. Infatti, effettuare una deduzione vuol dire riconoscere «una verità sulla base di altre verità da noi già riconosciute, secondo una legge logica. Supponiamo di aver formato arbitrariamente le proposizioni '2<1' e 'Se qualcosa è minore di 1, allora è maggiore di 2' senza sapere se esse sono vere. In modo puramente formale potremmo derivare da esse '2>2'; ma questa non sarebbe però una deduzione perché manca la verità delle premesse. E la verità della conclusione non sarebbe fondata meglio con questa pseudoinferenza che non senza di essa»[42]. Quindi «non si può utilizzare un pensiero come premessa di un'inferenza né inferirne o farne seguire nulla finché non se ne è riconosciuta la verità»[43].

Perciò Frege esclude che la logica possa servire, come sostiene Aristotele, per la pratica dell'argomentazione nelle dispute sia pubbliche che private. Tale pratica richiede, infatti, di considerare ipotesi la cui verità non è ancora conosciuta e che possono essere false.

Ancor più Frege esclude che la logica sia utile per trovare i principi delle scienze, e che quindi permetta di scoprire nuove verità. A suo parere, infatti, alla domanda di come venga scoperta una verità matematica, si può rispondere differentemente da persone differenti e quindi in modo puramente soggettivo, perciò il problema della scoperta non può essere oggetto della logica.

5. Lo concezione della logica di Mill

Non soltanto la concezione della logica di Aristotele è più ampia di quella di Frege, ma tali sono anche quelle di alcuni predecessori immediati di Frege, come Mill e von Helmholtz, che Frege critica sprezzantemente per la loro concezione empiristica della logica e della matematica. Per esempio, di Mill dice che «in questo senso anche tutte le storie del barone di Münchausen sono empiriche; infatti certamente, prima che esse potessero essere inventate, dev'essere stata fatta ogni sorta di osservazione»[44]. E di von Helmholtz dice che «ben poco mi si è presentato di meno filosofico di questo articolo filosofico, e ben poche volte è stato più misconosciuto il senso della questione epistemologica di come qui accade»[45].

[41] Frege (1976), p. 30.
[42] *Ibid*.
[43] Frege (1990), p. 390.
[44] Frege (1988), p. 22.
[45] Frege (1962), vol. 2, p. 140, nota.

Consideriamo anzitutto la concezione della logica di Mill. Secondo Mill, il compito della logica è quello di studiare come le proposizioni vengono provate. Ma provarle vuol dire inferirle da altre. Perciò il compito della logica è quello di studiare l'inferenza.

Ma che cos'è l'inferenza per Mill? È il passaggio da certe proposizioni ad un'altra proposizione che non è contenuta in esse. Essa è «un passaggio dal noto all'ignoto: un mezzo per arrivare alla conoscenza di qualcosa che prima non conoscevamo»[46]. Non è un'inferenza, invece, quella in cui «la proposizione apparentemente inferita da un'altra risulta all'analisi essere una semplice ripetizione della stessa asserzione, o di parte della stessa asserzione, che era contenuta nella prima»[47].

Ma se l'inferenza è un passaggio dal noto all'ignoto, allora l'inferenza deduttiva, che Mill identifica col sillogismo, non è un'inferenza. Infatti, «è universalmente ammesso che un sillogismo è difettoso se nella conclusione vi è qualcosa di più di quanto è stato assunto nelle premesse. Ma questo equivale a dire che col sillogismo non è mai stato né può essere dimostrato nulla che non fosse già noto, o non si fosse già 'assunto' come già noto, prima»[48]. Perciò, «il sillogismo, per il quale soltanto è stato spesso dichiarato appropriato il nome di ragionamento, in realtà non ha alcun titolo per essere chiamato ragionamento», dal momento che «un sillogismo non può dimostrare più di quanto è contenuto nelle premesse»[49].

Questo implica che, se la geometria consta di inferenze deduttive a partire dagli assiomi e dalle definizioni, non si sa spiegare «come accada che una scienza come la geometria possa essere tutta 'avviluppata' in poche definizioni ed assiomi»[50]. Né vale l'argomento che in un'inferenza deduttiva la conclusione è contenuta nelle premesse non esplicitamente ma solo implicitamente, e quindi per implicazione. Infatti «è impossibile attribuire alcun serio valore scientifico ad un semplice sotterfugio qual è la distinzione tra l'essere contenuto nelle premesse per implicazione e l'essere asserito direttamente in esse»[51].

In appoggio alla tesi che il sillogismo non è un'inferenza, Mill adduce il fatto che «in ogni sillogismo, considerato come un'argomentazione per provare la conclusione, c'è una *petitio principii*», perché quando diciamo, 'Tutti gli uomini sono mortali, Socrate è un uomo, perciò Socrate è mortale', la conclusione 'Socrate è mortale' è presupposta nell'assunzione più generale 'Tutti gli uomini sono mortali', dal momento che «non possiamo essere sicuri della mortalità di tutti gli uomini a meno che non siamo già certi della mortalità di ogni singolo uomo»[52]. Infatti da «un principio generale non possiamo inferire altri particolari se non quelli che il principio stesso assume come noti»[53].

In realtà, secondo Mill, l'unica vera inferenza è l'induzione. Infatti, da dove deriviamo un'assunzione generale, come 'Tutti gli uomini sono mortali'? La deriviamo «dall'osservazione. Ora, tutto ciò che l'uomo può osservare sono casi individuali. Da questi devono essere ricavate tutte le verità generali, e in essi possono essere di nuovo risolte»[54]. Ciò vale quindi anche per 'Tutti gli uomini sono mortali', che è il risultato di

[46] Mill (1963-86), vol. 7, p. 183.
[47] Ivi, p. 158.
[48] Ivi, p. 183.
[49] *Ibid*.
[50] Ivi, p. 185.
[51] *Ibid*.
[52] Ivi, p. 184.
[53] *Ibid*.
[54] Ivi, p. 186.

una generalizzazione in virtù della quale, «dai casi che abbiamo osservato, ci sentiamo autorizzati a concludere che quello che abbiamo trovato vero in quei casi vale per tutti i casi simili, passati, presenti o futuri, per numerosi che siano»[55]. Dunque un'assunzione generale, come 'Tutti gli uomini sono mortali', si ottiene mediante l'induzione.

Inoltre, secondo Mill, non solo l'unica vera inferenza è l'induzione, ma ogni vera inferenza è un'inferenza da particolari a particolari. Questo appare chiaro dalla geometria. Quando dimostriamo «una qualsiasi proprietà del cerchio mediante una figura», noi non partiamo dall'assunzione «che in tutti i cerchi i raggi sono eguali, ma solo dall'assunzione che essi sono eguali nel cerchio *ABC*», e, partendo da questa assunzione relativa al particolare cerchio *ABC*, «dimostriamo che una certa conclusione è vera non di tutti i cerchi ma del particolare cerchio *ABC*»[56]. Quindi effettuiamo un'inferenza da particolari a particolari. La dimostrazione non poggia su un'assunzione generale, ma su un'assunzione «limitata al caso particolare: poiché, però, quel caso è scelto come un esemplare o un paradigma dell'intera classe dei casi inclusi nel teorema, non vi può essere, per fare l'asserzione in quel caso, alcuna ragione che non esista egualmente in ogni altro caso»[57]. In generale, «in qualsiasi dimostrazione, basta che noi assumiamo, per un caso particolare scelto opportunamente, ciò che con l'asserzione della definizione o del principio, annunciamo che intendiamo assumere in tutti i casi che possono sorgere»[58]. Dunque ogni dimostrazione è un'inferenza da particolari a particolari.

Che ogni vera inferenza sia un'inferenza da particolari a particolari è mostrato anche dalle prime inferenze che effettuiamo da bambini prima di aver appreso l'uso del linguaggio. Il bambino che, «essendosi scottate le dita, evita di cacciarle di nuovo nel fuoco, ha ragionato o inferito, sebbene non abbia mai pensato la massima generale, 'Il fuoco scotta'»[59]. Egli «non generalizza; inferisce un particolare da particolari. Nello stesso modo ragionano anche le bestie. Non c'è alcuna base per attribuire ad alcuno degli animali inferiori l'uso di segni di natura tale da rendere possibili proposizioni generali», ma, come i bambini, essi inferiscono un particolare da particolari perché «non soltanto il bambino che si è scottato, ma anche il cane che si è scottato, ha paura del fuoco»[60].

Dunque il sillogismo non fornisce un'analisi corretta del ragionamento, perché in realtà è «un'inferenza da particolari a particolari; autorizzata da una precedente inferenza da particolari a generali, e sostanzialmente identica con essa; e perciò ha la natura di un'induzione»[61]. In generale «ogni inferenza è da particolari a particolari», perché «solo i particolari sono suscettibili di essere sottoposti ad osservazione, e perciò tutta la conoscenza, derivata dall'osservazione, comincia necessariamente dai particolari»[62]. Dunque ogni vera inferenza «ha la natura di un'induzione»[63]. Di conseguenza «il fondamento di tutte le scienze, anche di quelle deduttive o dimostrative, è l'induzione», in particolare «ogni passo dei ragionamenti deduttivi, persino di quelli della geometria, è un atto di induzione», e «una concatenazione di ragionamenti non

[55] Ivi, pp. 186-187.
[56] Ivi, p. 191.
[57] Ivi, p. 192.
[58] *Ibid*.
[59] Ivi, p. 188.
[60] *Ibid*.
[61] Ivi, p. 196.
[62] Ivi, p. 193.
[63] Ivi, p. 196.

consiste in nient'altro che nel riportare molte induzioni a vertere sul medesimo oggetto di ricerca e nel costringere un caso dentro un'induzione per mezzo di un'altra»[64].

Anche gli assiomi della matematica si ottengono mediante l'induzione. Infatti, gli assiomi della geometria sono «generalizzazioni dall'osservazione. La proposizione, 'Due linee rette non possono racchiudere uno spazio', o, in altre parole, 'Due linee rette che si sono incontrate una volta, non si incontrano più ma continuano a divergere', è un'induzione a partire dai dati dei nostri sensi»[65]. Né si può obiettare che è impossibile seguire con l'occhio le linee prolungate all'infinito. Infatti, senza bisogno di seguirle con l'occhio, noi «possiamo sapere che, se mai si incontrano, o se, dopo essersi allontanate l'una dall'altra, cominciano di nuovo ad avvicinarsi, ciò deve accadere non ad una distanza infinita ma ad una distanza finita», perciò, «dalle prove dell'esperienza impariamo che una linea la quale dopo essersi allontanata da un'altra linea retta comincia ad avvicinarsi ad essa, produce sui nostri sensi l'impressione che noi descriviamo con l'espressione 'linea curva', non con l'espressione 'linea retta'»[66].

Parimenti, le proposizioni fondamentali dell'aritmetica si ottengono mediante l'induzione. Infatti, «le verità fondamentali di quella scienza poggiano tutte sulle prove dei sensi; esse vengono dimostrate mostrando ai nostri occhi e alle nostre dita che un numero qualsiasi dato di oggetti, per esempio dieci palle, può, per separazione e ridisposizione, mostrare ai nostri sensi tutti i differenti insiemi di numeri la cui somma è eguale a dieci»[67].

In generale, secondo Mill, «le scienze induttive, o dimostrative, sono tutte, senza eccezione, scienze induttive; la loro prova è quella dell'esperienza; ma esse sono anche, in virtù del peculiare carattere di una parte indispensabile delle formule generali secondo cui vengono fatte le loro induzioni, scienze ipotetiche. Le loro conclusioni sono vere solo sotto certe ipotesi che sono, o dovrebbero essere, approssimazioni alla verità, ma che di rado, se non addirittura mai, sono esattamente vere»[68]. Questo è chiaro non solo nel caso della geometria ma anche in quello dell'aritmetica perché, «in tutte le proposizioni concernenti i numeri, è implicita una condizione senza la quale nessuna di esse sarebbe vera; e tale condizione è un'assunzione che può essere falsa. La condizione è che 1=1; che tutti i numeri sono numeri della medesima unità o di unità eguali. Supponiamo che questo sia dubbio, e nessuna delle proposizioni dell'aritmetica rimarrà vera»[69].

6. La concezione della logica di von Helmholtz

Abbiamo visto che, secondo Mill, i bambini prima di aver appreso l'uso del linguaggio, così come gli animali inferiori, effettuano inferenze, e precisamente inferenze induttive da particolari a particolari. Questa tesi è ampliata e precisata da von Helmholtz, che la estende alle percezioni sensibili. Egli infatti afferma che sono certe «inferenze induttive che portano alla formazione delle nostre percezioni sensibili», ed esse possono essere dette propriamente «inferenze: inferenze induttive effettuate in modo inconsapevole»[70].

Questo significa che per von Helmholtz il campo della logica dev'essere esteso ai processi inferenziali inconsapevoli, come quelli che stanno alla base delle nostre

[64] Ivi, p. 224.
[65] Ivi, p. 231.
[66] Ivi, p. 235.
[67] Ivi, p. 256.
[68] Ivi, p. 253.
[69] Ivi, p. 258.
[70] von Helmholtz (1896), p. 582.

percezioni sensibili, che occorrono troppo velocemente e ad un livello troppo basso nella mente per essere accessibili all'introspezione consapevole. Che von Helmholtz ampli il campo della logica è chiaramente avvertito dai suoi contemporanei, come Dilthey il quale osserva che, con la sua «logica dell'inferenza inconsapevole», in base alla quale «i processi fisici in cui ha luogo la percezione sono equivalenti quanto agli effetti alle operazioni del pensiero discorsivo», von Helmholtz «ha ampliato il campo della logica»[71].

7. Confronto tra le concezioni della logica di Frege, Mill e von Helmholtz

Da questa descrizione delle concezioni della logica di Mill e von Helmholtz appare chiaro che esse sono più ampie di quella di Frege.

Per esempio, Frege respinge la tesi di Mill che rientri tra i compiti della logica di determinare come arriviamo alle proposizioni fondamentali della matematica, perché per lui nessuna logica della scoperta è possibile.

Parimenti, Frege respinge la tesi di Mill che le proposizioni fondamentali della matematica si ottengano mediante l'induzione, perché per lui le proposizioni matematiche sono verità assolutamente certe. A suo parere, la tesi di Mill è infondata perché «l'induzione deve appoggiarsi sulla teoria della probabilità, non potendo mai rendere una proposizione altro che probabile»[72]. L'induzione, quindi, non può mai rendere una proposizione matematica assolutamente certa. Si noti che, affermando che l'induzione deve appoggiarsi sulla teoria della probabilità, Frege, come tanti altri dopo di lui, assume che esista una stretta connessione tra induzione e probabilità, un'assunzione quanto meno problematica.

Inoltre Frege respinge l'estensione di Mill e di von Helmholtz dell'ambito della logica al pensiero non-verbale. Questa estensione è implicita in quanto dice Mill su come ragionano i bambini e gli animali inferiori che, pur senza possedere l'uso del linguaggio, compiono induzioni inferendo particolari da particolari. Ed è esplicita in quanto dice von Helmholtz sulle nostre percezioni sensibili, alla base delle quali vi sono certe inferenze induttive effettuate in modo inconsapevole. Una tale estensione è inammissibile per Frege, perché per lui la logica si occupa del predicato 'vero', che riguarda proposizioni e specificamente «proposizioni assertorie, quelle proposizioni, cioè, con cui comunichiamo fatti o enunciamo leggi matematiche o leggi naturali»[73].

8. Le ragioni della concezione della logica di Frege

Oltre a quelle di Mill e di von Helmholtz, nell'Ottocento sono state elaborate anche altre concezioni della logica più ampie di quella di Frege, ma per ragioni di spazio non potrò parlarne qui. Cercherò invece di rispondere alla domanda: perché Frege adotta una concezione della logica più restrittiva di quella di tanti suoi predecessori?

A mio parere la ragione sta nel fatto che, fino alla fine della sua vita, Frege è stato dominato dalla preoccupazione per l'oggettività e la certezza della matematica.

Per oggettività della matematica Frege intende la sua indipendenza dalle nostre sensazioni e rappresentazioni mentali. Per lui «oggettivo è ciò che è conforme a leggi,

[71] Dilthey (1923-), vol. XIX, p. 393.
[72] Frege (1988), p. 25.
[73] Frege (1969), p. 140.

concettuale, giudicabile, ciò che può essere espresso mediante parole»[74]. La nozione cruciale di cui Frege si serve per garantire l'oggettività della matematica è quella di senso, perché egli ritiene che il senso sia oggettivo in quanto «può essere possesso comune di molti e non è parte o modo della psiche individuale»[75]. E può essere espresso mediante parole, dunque può essere «afferrato da chiunque conosca a sufficienza la lingua»[76].

Per certezza della matematica Frege intende la possibilità «di elevare la verità dei singoli teoremi al di sopra di ogni dubbio», convincendoci della loro saldezza così come ci convinciamo «dell'immobilità di una roccia per aver tentato invano di spostarla»[77]. Solo con una tale convinzione possiamo fugare i dubbi sulla validità della conoscenza matematica sollevati da concezioni empiristiche della logica e della matematica, come quelle di Mill e di von Helmholtz. Il modo cruciale in cui Frege ritiene di poter fugare tali dubbi è fondando sull'intuizione le proposizioni fondamentali che stanno alla base delle verità matematiche.

Alcuni ritengono che Frege non sia stato dominato dalla preoccupazione per l'oggettività e la certezza della matematica, ma piuttosto da quella per il rigore. Per esempio, secondo Blanché e Dubuc, per Frege la logica è principalmente «un mezzo, necessario per conseguire il suo obiettivo di un perfetto rigore»[78]. In effetti, è vero che Frege si lamenta del fatto che «la matematica versa al momento in una condizione poco soddisfacente, se guardiamo non tanto all'estensione esteriore, quanto piuttosto alla perfezione e alla chiarezza interne. Sotto questo aspetto essa lascia quasi tutto a desiderare confrontata con l'ideale che non a torto ci si fa di questa scienza, e se si considera che, per la sua stessa natura, essa dovrebbe essere più idonea di altre discipline ad avvicinarsi al suo ideale»[79]. Questo sembrerebbe avvalorare la tesi che Frege sia stato dominato dalla preoccupazione per il rigore.

Ma in realtà per Frege il rigore è importante soltanto nella misura in cui serve come mezzo per raggiungere lo scopo dell'oggettività e della certezza della matematica. Per esempio, egli dichiara che «il rigore della dimostrazione rimane un'illusione anche se la catena dei ragionamenti è priva di lacune, quando le definizioni sono giustificate solo a posteriori, in base al fatto che non ci siamo imbattuti in alcuna contraddizione. In questo modo non raggiungiamo mai più di una certezza empirica, e dobbiamo in ogni caso essere preparati alla possibilità di incontrare da un momento all'altro qualche contraddizione che mandi in rovina l'intero edificio»[80].

Quindi per Frege il rigore della dimostrazione, inteso come mancanza di lacune logiche, non basta per assicurare l'oggettività e la certezza della matematica, occorre che le proposizioni fondamentali che stanno alla base delle verità matematiche siano vere e indubitabili. Perciò l'indagine del fondamento della matematica dev'essere esteso dalle dimostrazioni alle proposizioni fondamentali su cui poggiano le dimostrazioni, e questo va «alquanto più in là di quanto non ritenga necessario la maggior parte dei matematici»[81].

Addirittura Frege sembra interessato, più che alla matematica in se stessa, alla matematica in quanto incarnazione dell'ideale di una scienza oggettiva e certa perché basata su proposizioni fondamentali certe e derivante i suoi teoremi da esse in modo

[74] Frege (1988), p. 40.
[75] Frege (1990), p. 146.
[76] Ivi, p. 144.
[77] Frege (1988), p. 14.
[78] Blanché-Dubuc (1996), p. 311.
[79] Frege (1969), p. 171.
[80] Frege (1988), p. 9.
[81] Ivi, p. 10.

puramente logico, quindi stabilendo relazioni oggettive tra le proposizioni fondamentali e i teoremi. Egli afferma, infatti, che, «se si chiede in che cosa stia propriamente il valore delle conoscenze matematiche, la risposta deve essere: meno in ciò che si conosce che nel modo in cui si conosce, meno nella materia della conoscenza che nel grado della sua chiarificazione teorica e della comprensione della connessione logica»[82].

Che Frege sia dominato dalla preoccupazione per l'oggettività e la certezza della matematica spiega perché egli ritiene che il compito della logica sia quello di giustificare le verità matematiche già conosciute: solo la giustificazione può assicurarne l'oggettività e la certezza.

La preoccupazione per l'oggettività e la certezza della matematica spiega anche perché Frege esclude dall'ambito della logica il problema della scoperta. Per lui, è vero che spesso si può dare un resoconto di come si è arrivati a scoprire una legge matematica, ma «ovviamente un tale resoconto di come si è giunti a ritener vero qualcosa non costituisce una dimostrazione», perché «la storia della scoperta di una legge matematica» certamente «non può surrogare la fondazione giustificante. Questa sarà sempre astorica; sarà irrilevante sapere chi ci ha pensato per primo, che cosa ha dato lo spunto a un così brillante ragionamento e quando e dove il tutto abbia avuto luogo»[83].

La preoccupazione per l'oggettività e la certezza della matematica spiega altresì perché Frege nega che la logica possa studiare le leggi del pensiero. Con un tale studio verrebbe meno «la distinzione tra le ragioni che giustificano un convincimento e le cause che lo determinano. Una giustificazione in senso proprio diventa impossibile; al suo posto dovrebbe subentrare il racconto di come si è arrivati a quel convincimento, dal che si deve inferire che ogni cosa ha avuto una causa psicologica»[84].

La preoccupazione per l'oggettività e la certezza della matematica conferma inequivocabilmente che lo scopo di Frege è di tipo epistemologico. Come egli stesso dichiara, nella sua opera «quasi tutto è legato all'ideografia»[85]. Ora, l'ideografia è lo strumento sviluppato da Frege per lo scopo epistemologico di giustificare le verità matematiche, garantendole così dal dubbio scettico. Sembrano assolutamente fuorvianti, perciò, affermazioni come quella di Kenny secondo cui, «per la maggior parte della sua vita, Frege diede priorità alla logica semplicemente ignorando l'epistemologia»[86]. Al contrario, per la maggior parte della sua vita Frege si dedicò alla logica unicamente in quanto strumento dell'epistemologia, e rivolse la sua attenzione altrove quando si convinse che la logica non avrebbe potuto permettergli di raggiungere il suo scopo epistemologico di giustificare le verità matematiche garantendole così dal dubbio scettico[87].

9. Conclusione

Da quanto detto appare chiaro che, alla domanda se Frege abbia iniziato una rivoluzione nella concezione della logica, si deve rispondere negativamente. Frege non ha iniziato una rivoluzione nella concezione della logica neppure nel senso minimale che ha assegnato alla logica un ambito più ristretto di quello riconosciutole da Aristotele, Mill

[82] *Ibid*.
[83] Frege (1969), p. 3.
[84] Ivi, p. 159.
[85] Ivi, p. 200.
[86] Kenny (1995), p. 212.
[87] Cfr. Cellucci (1998), pp. 106-108.

e von Helmholtz. Una tale rivoluzione nella concezione della logica è stata iniziata se mai da Kant, alla cui concezione della logica, del resto, chiaramente Frege si ispira[88].

Nondimeno la concezione della logica di Frege, e non quella di Kant, ha avuto un'influenza diretta e determinante nel Novecento. In esso si è universalmente accettato che la logica debba occuparsi solo di «come si giustificano completamente le credenze matematiche»[89]. Perciò si è convenuto che, poiché la matematica poggia su due sostegni, ossia gli assiomi e l'inferenza logica, la logica debba limitarsi a studiare «che cosa giustifica gli assiomi» e «su che cosa si basa la nostra fede nell'inferenza logica»[90]. La logica non può occuparsi, invece, di come si scoprono gli assiomi, perché «non vi è alcuna speranza, ad ogni nuovo assioma si fa, per così dire, un salto nel buio, una scommessa», e pertanto «non siamo più nel dominio della scienza ma in quello della poesia»[91]. Tanto meno la logica può occuparsi dei processi mentali o cerebrali che stanno alla base della matematica, perché tali processi sono «fenomeni realmente estranei alla natura del pensiero matematico in quanto tale»[92].

Questo punto di vista ha avuto un'influenza negativa sullo sviluppo non soltanto della logica, ma anche della matematica e della filosofia del Novecento, e alla fine si è rivelato insostenibile per varie ragioni, tra cui in primo luogo i teoremi di incompletezza di Gödel. Ma, avendo gia ampiamente trattato tale argomento altrove, mi asterrò dal parlarne qui[93].

Bibliografia

Barnes, J. (1999), "Postface", a G. Frege, *Idéografie*, Vrin, Paris, pp. 119-206.

Blanché, R. e Dubuc, J. (1996), *La logique et son histoire*, Colin, Paris.

Cellucci, C. (1998), *Le ragioni della logica*, Laterza, Bari.

Cellucci, C. (2002), *Filosofia e matematica*, Laterza, Bari.

Coffa, J.A. (1991), *The Semantic Tradition from Kant to Carnap*, a cura di L. Wessels, Cambridge University Press, Cambridge.

Dilthey, W. (1923 -), *Gesammelte Schriften*, Vandenhoeck & Ruprecht, Göttingen.

Frege, G. (1962), *Grundgesetze der Arithmetik*, Olms, Hildesheim.

Frege, G. (1964), *Begriffsschrift und andere Aufsätze*, a cura di I. Angelelli, Olms, Hildesheim.

Frege, G. (1969), *Nachgelassene Schriften*, a cura di H. Hermes, F. Kambartel e F. Kaulbach, Meiner, Hamburg.

Frege, G. (1976), *Wissenschaftlicher Briefwechsel*, a cura di G. Gabriel, H. Hermes, F. Kambartel, C. Thiel e A. Veraart, Meiner, Hamburg.

Frege, G. (1988), *Die Grundlagen der Arithmetik*, a cura di C. Thiel, Meiner, Hamburg.

Frege, G. (1990), *Kleine Schriften*, a cura di I. Angelelli, Olms, Hildesheim.

George, A. e Velleman, D.J. (2002), *Philosophies of Mathematics*, Blackwell, Oxford.

Gillies D. (1992), "The Fregean revolution in Logic", in Gillies, D. (a cura di), *Revolutions in Mathematics*, Clarendon Press, Oxford, pp. 265-305.

Girard, J.-Y. (1989), "Le champ du signe ou la faillite du réductionnisme", in E. Nagel, J.R. Newman, K. Gödel e J.-Y. Girard, *Le théorème de Gödel*, Editions du Seuil, Paris, pp. 147-171.

[88] Cfr. ivi, pp. 41-42.

[89] Lehman (1979), p. 1.

[90] Maddy (1997), pp. 1-2.

[91] Girard (1989), p. 169.

[92] George-Velleman (2002), p. 2.

[93] Cfr. Cellucci (1998; 2002).

Kant, I. (1900 -), *Gesammelte Schriften*, Königlich Preußischen Akademie der Wissenschaften, Berlin.
Kapp, E. (1967), *Greek Foundations of Traditional Logic*, AMS Press, New York.
Kenny, A. (1995), *Frege*, Penguin Books, London.
Lehman, H. (1979), *Introduction to the Philosophy of Mathematics*, Blackwell, Oxford.
Leibniz, G.W. (1965), *Die philosophischen Schriften*, a cura di C.I. Gerhardt, Olms, Hildesheim.
Maddy, P. (1997), *Naturalism in Mathematics*, Oxford University Press, New York.
Mill, J.S. (1963-86), *Collected Works*, a cura di J.M. Robson, University of Toronto Press, Toronto.
von Helmholtz, H. (1896), *Handbuch der physiologischen Optik*, Voss, Leipzig.