Introduzione di Carlo Cellucci

a

Bernard Bolzano, *Del metodo matematico*, Bollati Boringhieri, Torino 2004, pp. 7-39.

Errata & addenda

1) Errata

p. 7, r. -10-9. Sostituire la nota 2 con «La logica attuale non è neppure un perfezionamento dell'algebra di Boole, ma riparte da altre basi ... Se Boole ne ha dato l'impulso, non è lui, ma Frege quello che i logici d'oggi riconoscono come fondatore della loro scienza, giacché Frege e non Boole ne ha recato i concetti fondamentali, l'intelaiatura e i primi elementi: in breve ha posto le fondamenta dell'edificio logico-matematico contemporaneo» (R. Blanché, *La logica e la sua storia da Aristotele a Russell*, Ubaldini, Roma 1973, p. 311).

p. 8, r. -11. Nella nota 6 sostituire Québec 1975. **con** Québec 1975; M. Siebel, *Der Begriff der Ableitbarkeit bei Bolzano* Academia Verlag, St. Augustin 1996.

p. 20, r. -6-5. Sostituire la nota 17 con Vedi G. Gentzen, *Investigations into logical deduction*, in M.E. Szabo (a cura di), *The Collected Papers of Gerhard Gentzen*, North-Holland, Amsterdam 1969, pp. 68-131.

p. 20, r. -1. Nella nota 18 sostituire Berlin-New York 1975 **con** Berlin-New York 1975, pp. 290-319.

p. 24, r. 5. Sostituire (senza la proposizione ausiliaria (D) **con** (senza la proposizione ausiliaria (D))

p. 27, r. 7-8. Sostituire del principio della sottoformula. **con** della proprietà della sottoformula.

p. 27, r. -1. Nella nota 23 sostituire Gentzen, *Ricerche sulla deduzione logica*, cit., p. 99. **con** Gentzen, *Investigations into logical deduction*, cit., p. 88.

p. 28, r. -9. Sostituire $\Gamma \Rightarrow \varphi \Rightarrow \psi$ **con** $\Gamma \Rightarrow \varphi \rightarrow \psi$

p. 29, r. -3. Nella nota 24 sostituire Vedi Gentzen, *Ricerche sulla deduzione logica*, cit., p. 78; **con** Vedi Gentzen, *Investigations into logical deduction*, cit., p. 69.

p. 30, r. -5-4 Nella nota 26 sostituire in B. Bolzano, *Mathematische und philosophische Schriften 1816-1827*, Frommann, Stuttgart-Bad Cannstatt **con** in B. Bolzano, *Gesamtausgabe*, Reihe I, Band 3: *Mathematische Schriften 1816-1827*, Frommann-Holzboog, Stuttgart, di prossima pubblicazione.

p. 30, r. -1. Nella nota 26 sostituire marzo 1984» **con** marzo 1984», Luciani, Roma 1987, pp. 34-56.

p. 33, r. -1. Nella nota 30 sostituire Vedi Gentzen, *Ricerche sulla deduzione logica*, pp. 92-96. **con** Vedi Gentzen, *Investigations into logical deduction*, pp. 81-85.

p. 34, r. -3-2. Nella nota 31 sostituire Vedi M.E. Szabo (a cura di), *The Collected Papers of Gerhard Gentzen* (North-Holland, Amsterdam 1969), cit., pp. 105 sg.; **con** Vedi Gentzen, *Investigations into logical deduction*, cit., pp. 105-106;

p. 36, r. 1. Cambiare il titolo del paragrafo 13 in *Logica e teoria della scienza*

p. 37, r. -6. Sostituire i requisiti della deducibilità stabiliti da Bolzano. **con** i requisiti sulla deducibilità stabiliti da Bolzano.

p. 39, r. -7. Nella nota 36 sostituire menzioniamo la seguente recente versione: **con** menzioniamo la seguente più recente versione:

2) Addenda

(Nuovi paragrafi a p. 39, dopo il paragrafo 13)

14. *Bolzano e la logica tradizionale*

Per comprendere il pensiero logico di Bolzano, invece di interpretarlo come un'anticipazione di alcuni sviluppi della logica matematica, può essere più utile metterlo in relazione con la logica tradizionale aristotelica, perché questo può aiutare a capirne alcuni aspetti peculiari.

Un primo esempio di ciò è dato dal fatto che la nozione di Bolzano di deducibilità come relazione tra due totalità di proposizioni può essere vista come una generalizzazione della concezione di Aristotele secondo cui «tutti i sillogismi universali avranno sempre conclusioni multiple, mentre tra i sillogismi particolari quelli affermativi avranno conclusioni multiple, ma quelli negativi daranno una conclusione singola. Infatti, tutte le proposizioni sono convertibili tranne soltanto la particolare negativa».[1]

Quello che Aristotele intende dire con ciò è che, se per esempio un sillogismo con le premesse,

Tutti gli *A* sono *B*, e
Tutti i *C* sono *A*

ha la conclusione,

Tutti i *C* sono *B*,

esso può anche avere la conclusione,

Alcuni *B* sono *C*.

Egli, dunque, vuole sottolineare che le regole della sillogistica non determinano una relazione di deducibilità tra due proposizioni (le premesse) e una singola proposizione (la conclusione), bensì tra due proposizioni (le premesse) e una molteplicità di proposizioni (le possibili conclusioni).

Con la sua nozione di deducibilità Bolzano non fa altro che generalizzare questa idea di Aristotele, presentandola come una relazione tra una totalità di proposizioni (le premesse) e una totalità di proposizioni (le conclusioni).

Lo stesso Aristotele ammette sillogismi con più di due premesse, ma solo a condizione che essi siano riducibili a sillogismi con due premesse.[2] Bolzano, invece, non impone alcun limite sul numero delle premesse. Quindi quella da lui operata è una effettiva generalizzazione della concezione di Aristotele.

Ma, pur generalizzando, Bolzano si mantiene saldamente nell'ambito della tradizione aristotelica. Questo si vede anche dal fatto che, oltre al requisito della compatibilità tra le premesse e la conclusione, egli impone anche quello che le premesse e la conclusione debbano avere delle rappresentazioni non logiche in comune.

Questo potrebbe far nascere la tentazione di stabilire una relazione tra Bolzano e la logica della rilevanza. Ma, nel richiedere che le premesse e la conclusione debbano avere delle rappresentazioni in comune, né Bolzano né la logica della rilevanza sono molto originali. Per esempio, già Geulincx affermava: «In un'argomentazione logica qualche termine ricorre ed è formulato sia nell'antecedente sia nel conseguente».[3] Però anche questa affermazione di Geulincx non è molto originale, perché semplicemente esprime l'ovvia proprietà dell'inferenza sillogistica che, non solo le premesse di un sillogismo hanno sempre un termine in comune tra loro, ma ciascuna premessa ha un termine in comune con la conclusione. Dunque il requisito di Bolzano che le premesse e la conclusione debbano avere delle rappresentazioni in comune appare ovvio se si mette in relazione la sua nozione di deducibilità con la logica tradizionale, invece di considerarla un'anticipazione della nozione di conseguenza logica di Tarski.

Considerazioni simili si applicano anche ad altri caratteri della nozione di deducibilità di Bolzano. Per esempio, abbiamo detto che c'è una certa relazione tra una certa proprietà della nozione di deducibilità di Bolzano e la regola di taglio di Gentzen. Ma tale proprietà della nozione di deducibilità di

[1] Aristotele, *An. pr.*, II 1, 53 a.
[2] Vedi Aristotele, *An. pr.*, I 25, 42 a.
[3] Vedi A. Geulincx, *Logica fundamentis suis, a quibus hactenus collapsa fuerat, restituta*, in *Opera philosophica*, Frommann (Holzbog), Stuttgart-Bad Cannstatt 1968, III, 1, 12.

Bolzano può essere meglio compresa se la si mette in relazione con la logica tradizionale aristotelica. Infatti, la proprietà in questione esprime poco più che la transitività della relazione di deducibilità, e questa è già chiaramente formulata da Aristotele: «Nel caso che, se *A* è, di necessità *B* è, e che, se *B* è, di necessità *C* è, allora se *A* è, *C* dovrà essere».[4]

In effetti, come osserva Thom, «le dimostrazioni di Aristotele non si fondano mai su nulla di più della seguente versione ristretta di questa regola di taglio: se sono tesi

$$\frac{p \quad Q}{q} \text{ e } \frac{q \quad R}{r},$$

tale è

$$\frac{p \quad Q \quad R}{r},$$

dove p, q, r sono forme categoriche e Q, R sono successioni (anche vuote) di forme categoriche».[5] Ora, questa versione ristretta della regola di taglio usata nelle dimostrazioni di Aristotele corrisponde alla proprietà della nozione di deducibilità di Bolzano di cui sopra.

Un altro esempio del fatto che, per comprendere il pensiero logico di Bolzano, invece di interpretarlo come un'anticipazione di alcuni sviluppi della logica matematica, è più utile metterlo in relazione con la logica tradizionale, è dato dagli alberi di Bolzano del risalire da una verità concettuale al suo fondamento.

Per quanto suggestivo possa essere l'accostamento di tali alberi alle dimostrazioni normali (senza tagli) di Gentzen, una migliore comprensione del loro carattere si ottiene se li si mette in relazione con la concezione di Aristotele della conoscenza scientifica. Per Aristotele, «noi diciamo di conoscere una cosa solo allorché possediamo la conoscenza delle cause prime e dei principi primi», e la conoscenza si ottiene risalendo «dalle cose che sono più conoscibili e più manifeste per noi» fino alle cause prime, ai principi primi che costituiscono il fondamento di tali cose, e sono le cose «che sono più chiare e conoscibili per natura»; perciò «noi dobbiamo necessariamente procedere in questo modo, assumendo cioè come punto di partenza le cose che sono meno note per natura ma più chiare per noi, per giungere alle cose che sono più chiare e più conoscibili per natura».[6]

Gli alberi di Bolzano del risalire da una verità concettuale al suo fondamento corrispondono al processo di Aristotele del risalire dalle cose che sono più conoscibili e più manifeste per noi alle cause prime. Questa interpretazione è confermata dall'affermazione di Bolzano che «i concetti di causa ed effetto sono intimamente connessi con i concetti di fondamento e conseguenza» (*WL*, § 168 (3)). In virtù di essa, il risalire di Bolzano da una conseguenza al suo fondamento corrisponde al risalire di Aristotele dalle cose che sono più conoscibili e più manifeste per noi alle cause prime. Quest'ultimo non è che un momento del metodo analitico-sintetico di Aristotele.[7] Nello stesso modo il risalire di Bolzano da una conseguenza al suo fondamento può essere visto come un momento del metodo analitico-sintetico di Aristotele.

15. *Logica a conclusioni multiple*

Alla luce di quanto si è detto sembra abbastanza improprio vedere Bolzano come un precursore di Gentzen. Più in generale sembra abbastanza improprio vederlo come un precursore della logica a conclusioni multiple.

La logica a conclusioni multiple è uno sviluppo dell'ideale di Gentzen di un calcolo logico le cui deduzioni riflettano accuratamente la struttura delle dimostrazioni informali della pratica matematica. La formulazione di Gentzen delle regole ($\vee$E) e ($\exists$E) nel suo calcolo N della deduzione naturale devia da questo ideale perché, come ammette lo stesso Gentzen, in una dimostrazione basata sulla regola ($\vee$E) «la forma ad albero deve apparire alquanto artificiale perché essa non pone in evidenza il fatto che è dopo aver asserito» una disgiunzione $A\vee B$ «che noi distinguiamo i casi» A e B.[8] La forma ad albero non rappresenta l'ordine di priorità temporale. Lo stesso può dirsi di una dimostrazione basata sulla regola ($\exists$E).

[4] Aristotele, *An. post.*, I 3, 72 b.
[5] P. Thom, *The Syllogism*, Philosophia Verlag, München 1981, p. 37.
[6] Aristotele, *Phys.*, I 1, 184 a.
[7] Sul metodo analitico-sintetico di Aristotele, vedi C. Cellucci, *Le ragioni della logica*, Laterza, Roma 1998, pp. 14-17, 24-25, 291-292.
[8] G. Gentzen, *The Collected Papers of Gerhard Gentzen*, cit., p. 79.

Per rispettare l'ordine di priorità temporale, la regola ($\vee$E) dovrebbe essere sostituita con la regola con due conclusioni:

$$\frac{A \vee B}{A \quad B}$$

Non è difficile formulare una variante del calcolo N di Gentzen contenente una tale regola, ma sfortunatamente il calcolo risultante presenta alcune proprietà indesiderabili.[9]

Un'alternativa consiste nel considerare regole la cui conclusione è costituita da una successione di formule. Allora ($\vee$E) viene sostituita con la regola:

$$(\vee\mathrm{E})\ \frac{\Gamma, A \vee B}{\Gamma, A, B}$$

Il calcolo CCS risultante possiede tutte le proprietà positive del calcolo N di Gentzen ed è esente dai suoi difetti.[10] Perciò esso costituisce una migliore approssimazione all'ideale di calcolo logico di Gentzen che non il suo calcolo N della deduzione naturale.

16. *Logica proposizionale*

Il calcolo CCS fornisce un'analisi delle inferenze deduttive per mezzo della quale vengono distinti i ruoli deduttivi delle differenti costanti logiche. La logica tradizionale aristotelica, invece, non fornisce una tale analisi.

Questo dipende dal fatto che la concezione di Aristotele della forma logica delle proposizioni è molto riduttiva, perché omette le combinazioni di proposizioni mediante connettivi. Essa non include nemmeno la negazione come nozione logica. Aristotele assegna il ruolo della negazione all'operazione «la contraddittoria di». Per lui, la contraddittoria della contraddittoria di una proposizione A è la proposizione A.[11] Un risultato del fatto che la concezione di Aristotele della forma logica delle proposizioni omette le combinazioni di proposizioni mediante connettivi è che la sillogistica aristotelica può essere formulata in termini moderni come un calcolo senza connettivi.[12] Essa, perciò, non fornisce un'analisi delle inferenze deduttive per mezzo della quale vengano distinti i ruoli deduttivi delle differenti costanti logiche.

Per sillogistica aristotelica si intende qui la teoria di Aristotele del sillogismo categorico. Ma la situazione non è diversa se, invece dei sillogismi categorici, si considerano i sillogismi ipotetici o quelli disgiuntivi.

Infatti, tali sillogismi sono riducibili a inferenze più elementari, e perciò non si può dire che essi forniscano un'analisi delle inferenze deduttive per mezzo della quale vengano distinti i ruoli deduttivi delle differenti costanti logiche. Per esempio, il sillogismo disgiuntivo:

$$\frac{A \vee B \quad \neg A}{B}$$

è riducibile alla seguente deduzione del calcolo CCS, consistente di sole eliminazioni:

$$\begin{array}{l} (\vee\mathrm{E})\ \dfrac{A \vee B}{A, B \quad \neg A} \\ (\neg\mathrm{E})\ \overline{\qquad\quad B \qquad} \end{array}$$

[9] Vedi A.M. Ungar, *Normalization, cut-elimination and the theory of proofs*, CSLI, Stanford 1992.
[10] Vedi C. Cellucci, *Existential instantiation and normalization in sequent natural deduction*, Annals of Pure and Applied Logic, vol. 58, 111-148 (1992). Per una discussione vedi anche C. Cellucci, *On Quine's approach to natural deduction*, in P. Leonardi e M. Santambrogio (a cura di), "On Quine. New Essays", (Cambridge University Press, Cambridge 1995), pp. 314-335.
[11] Vedi T. Smiley, *What is a syllogism*, Journal of Philosophical Logic, vol. 2, pp. 136-154 (1973).
[12] Vedi J. Bacon, *Natural-deduction rules for syllogistic*, Journal of Symbolic Logic, vol. 31, pp. 686-687 (1966).

Che il sillogismo disgiuntivo sia riducibile ad inferenze più elementari significa che esso non è completamente analizzato, e quindi non si può dire che esso distingua il ruolo deduttivo della costante logica $\vee$ a cui esso è relativo.

Inoltre, che il sillogismo disgiuntivo sia riducibile a una deduzione del calcolo CCS consistente di sole eliminazioni, è anch'esso un fatto significativo. Infatti, secondo Genzten, «le introduzioni rappresentano, per così dire, le 'definizioni' dei simboli in esame, e le eliminazioni, in ultima analisi, non sono altro che le conseguenze di tali definizioni. Questo fatto può essere espresso nel modo seguente: nell'eliminare un simbolo, possiamo usare la formula del cui simbolo terminale ci occupiamo, solo 'nel senso attribuitogli dall'introduzione di quel simbolo'».[13] Dunque, secondo Gentzen, le eliminazioni non contribuiscono in nulla al significato delle costanti logiche, che è dato interamente dalle introduzioni. Ma allora, che il sillogismo disgiuntivo sia riducibile a una deduzione del calcolo CCS consistente di sole eliminazioni significa che esso non può svolgere alcun ruolo in un'analisi alla Gentzen del significato delle costanti logiche.

Naturalmente, il fatto che la sillogistica aristotelica non fornisca un'analisi delle inferenze deduttive per mezzo della quale vengano distinti i ruoli deduttivi delle differenti costanti logiche, non implica di per sé che anche la logica di Bolzano non la fornisca. Apparentemente la concezione di Bolzano della forma logica delle proposizioni è più ricca di quella di Aristotele. Questo, come abbiamo già visto, gli consente di formulare una proprietà della sua nozione di deducibilità logica che corrisponde alla regola di introduzione dell'implicazione nel conseguente del calcolo delle sequenze.

In considerazione di ciò van Benthem ha proposto un'assiomatizzazione della relazione di deducibilità di Bolzano sotto forma di un calcolo proposizionale.[14] Ma si tratta di una proposta abbastanza fuorviante.

Infatti, in primo luogo, appare improprio formulare la logica di Bolzano come una logica proposizionale. Per esempio, per illustrare la sua relazione di deducibilità, Bolzano usa esempi non proposizionali, come il seguente: Dalle proposizioni

Tutti gli *i* sono *j*, e
Tutti i *j* sono *k*,

si può dedurre la proposizione

Tutti gli *i* sono *k*,

rispetto alle variabili *i*, *j*, *k* (*ML*, § 8 (2)). Che Bolzano illustri la sua nozione di deducibilità per mezzo di esempi non proposizionale implica che è impossibile restringere la sua nozione di deducibilità all'ambito proposizionale.

In secondo luogo, le regole (iv) - (vi) della logica proposizionale di van Benthem non sembrano trovare un corrispettivo nelle proprietà della nozione di deducibilità formulate da Bolzano.[15] Per esempio, la regola (vi) di van Benthem,

$$\frac{P \Rightarrow Q \quad R \Rightarrow Q}{P \vee R \Rightarrow Q},$$

dovrebbe avere in Bolzano un corrispettivo del tipo seguente. Se *M*, *N*, *O*,... sono deducibili da *A*, *B*, *C*, *D*,... rispetto a *i*, *j*,... , e *M*, *N*, *O*,... sono deducibili da *F*, *G*, *H*,... rispetto a *k*, *l*,... , allora *M*, *N*, *O*,... sono deducibili da (*A* o *F*), *B*, *C*, *D*,..., *G*, *H*,... rispetto a *i*, *j*, *k*, *l*,... . Invece nulla del genere è rintracciabile tra le proprietà della nozione di deducibilità formulate da Bolzano. Anche ammesso che Bolzano fosse consapevole di una proprietà della sua nozione di deducibilità corrispondente alla regola (vi) di van Benthem, egli non presenta tale proprietà come costitutiva della sua nozione di deducibilità.

In generale Bolzano appare a disagio nel formulare proprietà della sua nozione di deducibilità che comportino combinazioni di proposizioni mediante connettivi, tranne forse nel caso della negazione. Ma anche nel caso della negazione la questione è lungi dall'essere ben determinata.

Infatti, in primo luogo, Bolzano definisce Neg. *A*, ossia la negazione della proposizione *A*, come «*A* è falsa», «*A* non ha verità», poiché afferma: «Sia *A* una proposizione qualsiasi. In seguito spesso indicherò la sua negazione, cioè la proposizione «*A* è falsa», con Neg. *A*» (*WL*, § 141). Ma l'uso che

[13] Gentzen, *The Collected Papers of Gerhard Gentzen*, cit., p. 80.
[14] J. van Benthem, *The variety of consequence, according to Bolzano*, Studia Logica, vol. 44, pp. 389-403 (1985).
[15] Le regole in questione sono formulate in van Benthem, *op. cit.*, p. 400.

Bolzano fa della sua definizione della negazione è sorprendente, perché egli identifica «La proposizione ‘Tutti gli uomini sono virtuosi’ è falsa» con «Tutti gli uomini non sono virtuosi». Infatti afferma: «Spesso si esprimono le proposizioni negative aggiungendo la particella ‘non’ alla copula o al verbo delle proposizioni. Per esempio, invece di dire «La proposizione ‘Tutti gli uomini sono virtuosi’ non ha verità», si dice brevemente «Tutti gli uomini non sono virtuosi» » (*WL*, § 141).

In secondo luogo, un fatto ancor più importante è che Bolzano si esprime come se Neg. Neg. *A*, ossia la negazione della negazione di *A*, fosse la stessa cosa di *A*. In effetti egli dice: «Neg. Neg. *M*, cioè M stessa» (*WL*, § 155 (30)). Questo mostra che la sua posizione corrisponde a quella di Aristotele, secondo cui la contraddittoria della contraddittoria di una proposizione *A* è la proposizione *A*.

In vista di ciò sembra giustificato asserire che, al pari della sillogistica aristotelica, neppure la logica di Bolzano fornisca un’analisi delle inferenze deduttive per mezzo della quale vengano distinti i ruoli deduttivi delle differenti costanti logiche.

17. *Conclusione*

Le considerazioni che sono state svolte in questa introduzione forniscono un quadro sommario delle principali idee sulla logica sviluppate da Bolzano in *WL* e *ML*. Esse possono forse aiutare a dare una risposta alla questione: Quale significato ha il lavoro logico di Bolzano oggi? Tuttavia lasciano aperti vari problemi, tra i quali in primo luogo: Quale posto occupa Bolzano nella storia della logica? E più specificamente: Quale originalità ha il suo lavoro rispetto alle altre logiche del diciottesimo e del diciannovesimo secolo?

Che le considerazioni che sono state svolte in questa introduzione lascino aperti tali problemi dipende, certo, anche da ragioni di spazio, ma non soltanto da esse. Infatti, una risposta attendibile richiederebbe un’indagine storica molto approfondita, non solo sul pensiero di Bolzano, ma anche sullo sfondo storico su cui egli si muove, e un’indagine del genere manca ancora in gran parte nella letteratura. Lo stesso Bolzano sembra suggerirla attraverso il sottotitolo di *WL*, che recita: Tentativo di una rappresentazione completa e in gran parte nuova della logica con costante riferimento a quanti l’hanno trattata finora.

Il costante riferimento di cui parla Bolzano nel sottotitolo di *WL* è rappresentato dalla vasta mole di rimandi ai suoi predecessori logici che si trovano nella sua opera. Quest’ultima, certo, fornisce molti indizi per un’indagine del tipo menzionato, ma da sola non fornisce una risposta conclusiva. È auspicabile che, in un futuro non troppo lontano, gli storici della logica si dedichino a colmare questa lacuna.